Teoria gier

giaur, Tomasz Rostański, i Marcinek Drozd

Teoria gier

giaur, Tomasz Rostański, i Marcinek Drozd

Data wydania 23.08.2003

Autorem większości tekstów jest *giaur*. Gry n-osobowe opisał *Tomasz Rostański*. *Marcinek Drozd* wsparł nas uzupełniając tekst o grach 2xn o sumie zerowej.

Spis treści

Spis tabel

Wstęp

Oto kompilacja tekstów na temat teorii gier. Nie jest to książka wyczerpująca ten temat, raczej zebrane w pewną całość teksty omawiające wybrane zagadnienia.

Ze względu na brak czasu i wiedzy nie jestem w stanie opisać wszystkich zagadnień dotyczących teorii gier. Jeżeli czujesz się na siłach i chciałbyś opracować jakieś zagadnienie to zapraszam do współpracy [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/wspolpraca.php]. Mile widziane są wszelkie wskazówki, podpowiedzi oraz informacje o błędach i niedostatkach zamieszczonych tu materiałów.

...niemile widziane jest tylko malkontenctwo i marudzenie w stylu "czemu tak mało ?, a czemu nie ma tego ?, a czemu nie ma tamtego ?, a czemu nie ma owego ?"... eh, ludzie... żeby się wam zechciało głową ruszyć to byłoby tu wszystkiego więcej...

<giaur@qs.pl>

Rozdział 1. Podstawy teorii gier

Teoria gier jest to matematyczna teoria rozwiązywania sytuacji konfliktowych bądź współpracy, w których wynik uzyskany przez jedną osobę zależy także od decyzji podejmowanych przez inne. Teoria gier nie bada przyczyn ani genezy konfliktów - interesują ją tylko optymalne ich rozwiązania.

1.1. Obszar zastosowań

Jak sama nazwa wskazuje, teoria gier wzięła swój początek z analizy rozgrywek gier karcianych, szachów itp. Obecnie jej zastosowanie jest o wiele szersze i obejmuje m.in. (kolejność alfabetyczna):

- antropologię
- biologię
- ekonomię
- filozofię
- nauki polityczne
- nauki społeczne

1.2. Ograniczenia

Mimo tak szerokiego obszaru zastosowań, teoria gier nie jest i nigdy nie będzie uniwersalnym narzędziem do rozwiązywania wszelkiego typu konfliktów. Wiele z problemów jest zbyt skomplikowanych i złożonych, by dać się ująć w ramy matematycznego modelu.

Należy też zwrócić uwagę na fakt, że w sam pomysł analizowania konfliktów metodą matematyczną wpisane jest przekonanie o racjonalnym zachowaniu osób biorących w nich udział. Liczne eksperymenty dowodzą jednak, że wskazanie tego co jest dla kogoś racjonalne wcale nie jest takie proste. Teoria gier zakłada również, że uczestnicy konfliktów pragną zmaksymalizować swoją wygraną.

Obserwacje rzeczywistych zachowań ludzi dowodzą, że nie zawsze jest to prawdą. Ludzie w grach mogą zachowywać się *indywidualistycznie* (egoistycznie, racjonalnie) dążąc do maksymalizacji własnego zysku - tak jak to założyliśmy. Mogą też grać *kooperacyjnie*, zachowując się tak, by zmaksymalizować łączny zysk wszystkich uczestników rozgrywki. Mogą wreszcie przyjąć postawę *rywalizacyjną*, dążąc do maksymalizacji różnicy pomiędzy własnym zyskiem, a zyskiem osiąganym przez innych graczy.

Przyglądając się teoretycznym rozwiązaniom podsuwanym przez teorię gier, warto pamiętać o powyższych zastrzeżeniach.

1.3. Podstawowe definicje i założenia

Pod nazwą gry rozumieć będziemy pewien sformalizowany model sytuacji konfliktowej. Słowo gracz oznacza pojedynczą osobę lub grupę osób tworzących koalicję (działających wspólnie, we wspólnym interesie). Aby daną sytuację rozpatrywać z punktu widzenia teorii gier należy przyjąć pewne założenia odnośnie gry i stron konfliktu:

- istnieje co najmniej dwóch *graczy*

- każdy z graczy posiada przynajmniej dwie *strategie* czyli drogi postępowania
- w wyniku każdej gry każdy z graczy otrzymuje pewną *wygraną* (zwaną też *wypłatą*), której wysokość zależy od strategii zastosowanych przez wszystkich graczy

Wygraną (wypłatę) wyraża się dla wygody w liczbach. Jej odzwierciedleniem w rzeczywistości mogą być różne rzeczy i zdarzenia - od "łatwo mierzalnych" (np. otrzymanie lub strata pewnej sumy pieniędzy) po "trudno mierzalne" (np. zyskanie albo utrata twarzy). W tym drugim przypadku, staramy się rozsądnie przyporządkować odpowiednim zdarzeniom pewne wartości liczbowe[1]

Wszystkie zdefiniowane tu terminy staną się bardziej zrozumiałe gdy zapoznamy się z przykładami gier, co nastąpi już niebawem.

1.4. Typy gier

Gry można dzielić według wielu kryteriów, np.:

1.4.1. ilość graczy

Wyróżniamy gry dwuosobowe i wieloosobowe. W przypadku niektórych gier wieloosobowych może dochodzić do zawiązywania koalicji.

1.4.2. kooperacja między graczami

Gry kooperatywne to takie, w których gracze mogą porozumiewać się między sobą i zawierać koalicje, a *niekooperatywne* to te, w których jest to zabronione (lub niemożliwe).

1.4.3. charakter gry

Gry, w których jeden z graczy otrzymuje dokładnie tyle ile drugi musi oddać, nazywamy *grami o sumie zerowej*. Jeżeli ten warunek nie jest zachowany (i możliwe jest np. że wszyscy gracze zyskują w wyniku rozgrywki) wówczas mamy do czynienia z *grami o sumie niezerowej*.

Warto zwrócić uwagę na to rozróżnienie i zastanowić się nad przykładami gier obu typów. Do pierwszego zaliczyć można mecze sportowe i konflikty militarne, do drugiego "gry" ekonomiczne - np. negocjacje kontraktu.

1.4.4. dostępna informacja

W *grach z pełną informacją gracz* zna wszystkie strategie i cel swojego przeciwnika, zaś w *grach z informacją niekompletną* gracz nie wie jaki cel przyświeca przeciwnikowi (z jakim typem przeciwnika ma do czynienia).

1.4.5. gry strategiczne i gry ekstensywne

W *grach strategicznych* gracze znają nawzajem swoje strategie, czyli wiedzą jak mogą zachować się inni gracze. Wyboru strategii dokonują jednak jednocześnie, a dokładniej czynią to nie wiedząc, którą ze swoich strategii wybrali przeciwnicy. Co więcej, ustalają oni w ten sposób swój plan postępowania raz na zawsze i nie mogą go zmienić w trakcie rozgrywki. Prostym przykładem takiej gry jest dziecięca zabawa w "kamień-nożyce-papier".

W *grach ekstensywnych* istnieje pewna kolejność posunięć - gracze wykonują swoje ruchy (tj. dokonują wyboru strategii) na podstawie ruchów przeciwnika. Innymi słowy mamy tu do czynienia z ciągłym dopasowywaniem się graczy do zaistniałej sytuacji. Za przykład mogą posłużyć tu szachy.

[1] W rzeczywistości jest to złożone zagadnienie (zajmiemy się nim już niebawem). Polecam też lekturę 9-go rozdziału "Teorii gier" Straffina.

1.5. Podsumowanie - czego się dowiedziałeś

Po przeczytaniu tego rozdziału wiesz już czym zajmuje się teoria gier. Zdajesz sobie sprawę z obszaru jej zastosowań i z jej ograniczeń. Poznałeś też podstawowe typy gier i ich przykłady.

Rozdział 2. Gry o sumie zerowej

Z grami o sumie zerowej mamy do czynienia wszędzie tam, gdzie interesy graczy są dokładnie przeciwstawne, czyli tam, gdzie zysk jednego gracza jest równy przegranej drugiego. Gry te służą więc do modelowania sytuacji czystego konfliktu, w których nie ma mowy o współpracy między graczami, ze względu na wyraźną sprzeczność ich interesów.

2.1. Macierz wypłat

Gry o sumie zerowej najłatwiej jest przedstawić w postaci macierzy wypłat. Tak przedstawioną grę nazywamy grą w *postaci normalnej* 2 . Macierz wypłat zawiera wartości wypłat dla wszystkich możliwych kombinacji strategii obu graczy. Spójrzmy na poniższą macierz:

	B1	B2	B3
A1	5, -5	-3, 3	4, -4
A2	2, -2	-7, 7	-6, 6

Tabela 2.1. Przykładowa macierz wypłat

Przedstawia ona wszystkie możliwe wypłaty gry, w której gracz A dysponuje dwoma strategiami (A1, A2), a gracz B trzema (B1, B2, B3). Na przecięciu poszczególnych strategii graczy A i B wpisana jest wypłata. Pierwsza z liczb oznacza wypłatę dla gracza A, druga dla gracza B.

W przypadku gier o sumie zerowej stosuje się zapis uproszczony. Po co za każdym razem pisać dwie liczby, skoro wypłata gracza A jest zawsze liczbą przeciwną do wypłaty gracza B ? Dlatego też niepisana umowa mówi, że dla gier o sumie zerowej powyższą macierz gry zapiszemy tak:

	B1	B2	B3
A1	5	-3	4
A2	2	-7	-6

Tabela 2.2. Przykładowa macierz wypłat

Umówmy się, że liczby dodatnie w tej macierzy oznaczają ilość pieniędzy jaką otrzyma gracz A w wyniku rozgrywki. Jest to zarazem wielkość przegranej gracza B.

Przykładowo, w powyższej grze przy zastosowaniu przez gracza A strategii pierwszej (A1) i przez gracza B strategii drugiej (B2), gracz A będzie musiał wypłacić graczowi B 3 złote. W przypadku wyboru strategii A2 i B1 przegranym byłby gracz B i to on musiałby zapłacić 2 złote przeciwnikowi.

Dla wygody w większości przykładów przyjmiemy, że macierz wypłat zawiera wyłącznie całkowite liczby dodatnie (czyli że gracz B zawsze przegrywa). Oczywiście nie ma to żadnego znaczenia dla sposobu rozwiązywania gier.

2.1.1. Co to jest ta "wypłata" ?

Tak naprawdę, to wartości liczbowe nie są tu potrzebne. Wystarczy, że uszeregujemy w ścisły sposób nasze pre-

2Alternatywną możliwością przedstawiania gry jest postać ekstensywna, czyli "drzewko", którym zajmiemy się kiedy indziej (jeżeli w ogóle). :)

ferencje co do rozwiązań. Powiedzmy że mamy zbiór akcji (strategii) *A*. Zastosowanie którejś z tych strategii sprawia, że stajemy w obliczu pewnej konsekwencji ze zbioru konsekwencji *C*. Powinniśmy uszeregować te możliwe do uzyskania konsekwencje, tak by móc określić, którą z nich wolimy bardziej, a którą mniej.

Wyobraź sobie następujący przykład - mama kazała dziecku być przez godzinę cicho. Dziecko musi teraz zadecydować czy woli siedzieć godzinę cicho i się nudzić, czy też spędzić ten czas na beztroskiej zabawie a po godzinie dostać w skórę za niewypełnienie polecenia. Dziecko odpowiadając na to pytanie, szereguje swoje preferencje wobec możliwych konsekwencji swoich zachowań. Matematyk podpowiedziałby mu, że powinno określić na zbiorze możliwych konsekwencji *C* relację *preferencji*, która byłaby *kompletna, przechodnia i zwrotna*:

- *Kompletna*, czyli dla dwóch dowolnych *a*, *b* należących do *C* potrafilibyśmy powiedzieć czy wolimy *a* czy *b*.
- *Przechodnia*, co oznacza, że jeżeli wolę *a* od *b* i *b* od *c*, to oznacza to, że wolę *a* od *c*.
- *Zwrotność* oznacza, że potrafimy uszeregować nasze preferencje w stosunku do dwóch identycznych elementów ze zbioru *C*.[3]

I tym są tak naprawdę podawane w macierz gry liczby - pewnym porządkiem, uszeregowaniem. Nie należy więc na nie patrzeć jak na wartości bezwzględne. Rzadko zdarzy się, żeby wartości te odpowiadały prawdziwym wypłatom, jakie gracze otrzymują w wyniku rozgrywki.

2.2. Punkt siodłowy

Oto przykładowa macierz wypłat gry:

	B1	B2
A1	6	3
A2	5	1

Tabela 2.3. Gra z punktem siodłowym

Przeanalizujmy ją od strony gracza A. Chce on wygrać jak najwięcej przy założeniu, że jego przeciwnik będzie robił wszystko aby mu to uniemożliwić. Gracz A zakłada więc, że jakąkolwiek strategię wybierze, gracz B wybierze najdogodniejsze dla siebie posunięcie.

I tak jeżeli A wybierze strategię A1 wówczas jego wypłata w zależności od decyzji gracza B wyniesie 6 albo 3, a więc nie mniej niż 3. W przypadku wyboru strategii A2 gwarantuje sobie wygraną nie mniejszą niż 1. Teraz gracz A, który pragnie maksymalizować swoją wygraną, wybiera większą z tych liczb - jest to oczywiście liczba 3.

Analogicznie myśli gracz B, z tym że szuka on wypłat najniższych (pamiętajmy, że np. liczba 5 w macierzy oznacza dla niego wypłatę -5 !). Wybierając strategię B1 gracz B naraża się na stratę w wysokości 6. Wybierając B2 musi liczyć się ze stratą najwyżej 3. Ponieważ gracz B pragnie zminimalizować swoje straty, wybierze mniejszą z tych liczb.

Zapiszmy wybrane przez graczy liczby obok macierzy wypłat. Zaznaczmy te, które wydały się im korzystniejsze.

	B1	B2	

[3] Powyższy fragment o cechach relacji preferencji pisałem na podstawie Osborne, Rubinstein 'A Course in Game Theory' (rozdział 1, punkt 1.7). Nie jestem przekonany czy dobrze zrozumiałem to co tam napisali. Zachęcam żebyś sam tam zajrzał i się przekonał.

A1	6	3	*3*
A2	5	1	1
	6	*3*	

Tabela 2.4. Gra z punktem siodłowym - wybrane wartości

W tym przypadku doszło do pewnego rodzaju "ugody" między graczami. Oboje zgodzili się grać tak, że za każdym razem wypłata gracza A wyniesie 3, a gracza B -3. Gdyby którykolwiek z nich zmienił swoją strategię naraziłby się on na niepotrzebne straty. O takiej grze mówimy że posiada ona *punkt siodłowy*.

2.2.1. Jak znaleźć punkt siodłowy ?

Ogólny sposób poszukiwania punktu siodłowego jest następujący (jest to sposób skuteczny zarówno dla gier 2x2 jak i większych):

- wypisz minima z każdego wiersza i wybierz największe z nich (tzw. *minimaks*)
- wypisz maksima z każdej kolumny i wybierz najmniejsze z nich (tzw. *maksmin*)

Jeżeli obie liczby są równe, to gra posiada punkt siodłowy. Gracze powinni wybrać te strategie, które odpowiadają wyznaczonemu wierszowi i kolumnie. Jeżeli wybiorą inne strategie, narażą się na niepotrzebne straty.

2.2.2. Wiele punktów siodłowych

Może się zdarzyć, że gra posiada więcej niż jeden punkt siodłowy. Przyjrzyjmy się następującej macierzy wypłat:

	B1	B2	B3
A1	1	3	1
A2	0	5	0
A3	1	4	1

Tabela 2.5. Gra z wieloma punktami siodłowymi

Teraz postępując zgodnie z podanym algorytmem wypiszmy najmniejsze wartości wierszy i największe wartości kolumn, po czym oznaczmy na czerwono minimaksy i maksminy.

	B1	B2	B3	
A1	1	3	1	*1*
A2	0	5	0	0
A3	1	4	1	*1*
	1	5	*1*	

Tabela 2.6. Gra z wieloma punktami siodłowymi - wybrane wartości

No i jak teraz powinni grać gracze ? Zauważmy, że wszystkie punkty siodłowe mają taką samą wartość, oraz że leżą w czterech rogach prostokąta. Okazuje się, że jeżeli obaj gracze będą grali swoimi strategiami "siodłowymi" (czyli A1 i A3, oraz B1 i B3) to będzie ok.

2.2.3. Zimny prysznic

Jeżeli myślisz, że wiesz już wszystko na temat znajdowania punktów siodłowych, to się mylisz. Zajrzyj do tekstu poświęconego strategiom dominującym żeby nieco ułatwić sobie poszukiwanie punktów siodłowych.

2.3. Strategie dominujące

wszystkie strategie są równe, ale niektóre są równiejsze ;)

Skrypt znajdujący i usuwający strategie zdominowane w grach NxN o sumie zerowej znajdziesz tutaj [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#programy_dwieosoby].

Poznałeś już sposób znajdowania punktu siodłowego, dzięki czemu potrafisz już rozwiązać niektóre gry. W naszych rozważaniach na jego temat pominęliśmy jeden dość istotny aspekt. Mianowicie, gdy przyjrzysz się niektórym macierzom wypłat, zobaczysz, że niektóre strategie są wyraźnie lepsze od innych. Oto przykładowa macierz:

	B1	B2
A1	5	3
A2	2	-7

Tabela 2.7. Macierz gry ze strategią dominującą

Przyjrzyj się strategiom gracza A. Zauważysz, że strategia A2 jest dla niego mniej korzystna niż A1. Niezależnie od tego, którą ze swoich strategii zastosuje gracz B, gracz A zanotuje lepszy wynik stosując strategię A1 niż A2.

Analogiczne rozumowanie możesz przeprowadzić dla gracza B. Wykażesz bez trudu, że nie opłaca mu się stosować strategii B1.

No to już pewnie intuicyjnie czujesz, czym jest *strategia dominująca* - to po prostu ta "lepsza" od innych. Określenie "lepsza" jest na tyle nieprecyzyjne, że aż prosi się by zapytać co to dokładnie znaczy. Odpowiedź brzmi - "to zależy". Zależy mianowicie od tego, czy mówimy o *silnej dominacji* czy też o *słabej dominacji*.

Zaraz zajmiemy się tym rozróżnieniem, tylko najpierw jeszcze drobna uwaga. Skoro mamy strategie "lepsze" (*dominujące*) to musimy mieć też i te "gorsze", tj. przynoszące gorsze wyniki. Te drugie zwiemy *zdominowanymi*. Proste, nie ? Strategie *dominujące* i *zdominowane*.

2.3.1. Silna dominacja

Mówimy że dana strategia jest *silnie dominująca*, gdy stosując ją gracz gwarantuje sobie wyższą wypłatę, niż gdyby stosował jedną ze swoich pozostałych strategii.

Przykład silnej dominacji już widziałeś. Przyjrzyj się jeszcze raz macierzy wypłat zaprezentowanej na początku tego rozdziału:

	B1	B2
A1	5	3

A2	2	-7

Tabela 2.8. Silna dominacja - przykład

Jak widać, zastosowanie strategii A1 przyniesie graczowi A *w każdym przypadku* (tj. niezależnie od tego co zrobi gracz B) wypłatę wyższą niż gdyby stosował drugą ze swoich strategii. Dlatego możemy powiedzieć, że A1 jest strategią silnie dominującą.

2.3.2. Słaba dominacja

Można też sobie wyobrazić nieco słabsze określenie dominacji. Moglibyśmy powiedzieć, że strategie dominująca to taka, której zastosowanie przyniesie graczowi, taką samą, a przynajmniej w jednym wypadku wyższą wypłatę, niż zastosowanie jednej z pozostałych strategii. To jest właśnie *słaba dominacja*.

Różnica leży w tym, że *strategia słabo dominująca* nie musi być "lepsza" w każdym przypadku. Spójrz na poniższą macierz:

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	1	2	3	4	*5*
A2	1	2	3	4	*6*

Tabela 2.9. Słaba dominacja - przykład

Strategia A2 z pewnością jest "lepsza" od A1, bo nigdy nie przyniesie wyniku gorszego niż niż strategia A1, a w przypadku gdy gracz B użyje B5, strategia A2 przyniesie wynik lepszy. A2 jest więc strategią *słabo dominującą*. Jasne ?

2.3.3. Ułatwiamy sobie życie

Z całej tej zabawy w szukanie strategii dominujących płyną jasne wnioski. Patrząc na macierz gry najpierw wykreśl z niej wszystkie strategie zdominowane - w końcu nikt rozsądny ich nie użyje 4 - a dopiero potem bierz się za inne czynności.

Tak przy okazji - pewnie się już zorientowałeś, że wykreślając strategie zdominowane można odnaleźć punkt siodłowy, co ? Zerknij na tą macierz wypłat, to od niej zaczęliśmy zabawę w znajdowanie punktu siodłowego:

	B1	B2
A1	6	3
A2	5	1

Tabela 2.10. Gra z punktem siodłowym

Zastosujmy do niej nowo uzyskaną wiedzę o dominacji. Widać, że strategia A1 gracza A silnie dominuje strategię A2. Wniosek - można wyrzucić A2 z naszych rozważań. Analogicznie dla gracza B - z jego punktu widzenia strategia B2 silnie dominuję strategie B1. Wyrzucamy więc B1. I co dostajemy ? Ano znany nam już punkt siodłowy tej gry. Czary ? ;)

4A co by było gdyby ktoś ich jednak użył ? Mogło by to znaczyć, że nie odznacza się specjalnym rozsądkiem... albo że to my, źle rozpisaliśmy grę, tj. przyporządkowaliśmy poszczególnym zdarzeniom niewłaściwe wartości liczbowe !

2.3.4. Wykreśl wszystkie strategie zdominowane

Wykreślając strategie zdominowane, można zauważyć ciekawą rzecz - wykreślenie jednej, może pociągnąć za sobą "powstanie" kolejnej. Spójrz na poniższą macierz gry:

	B1	B2	B3	B4
A1	1	2	4	3
A2	2	1	4	0
A3	1	3	4	2
A4	1	2	3	4

Tabela 2.11. Wiele strategii zdominowanych

Czy wśród strategii gracza A widać jakąś strategię zdominowaną ? Nie. A u gracza B ? Owszem, B3 jest zdecydowanie najmniej korzystna. Wykreślmy ją więc:

	B1	B2	B4
A1	1	2	3
A2	2	1	0
A3	1	3	2
A4	1	2	4

Tabela 2.12. Wiele strategii zdominowanych

A teraz co ? Widać, że graczowi A nie opłaca się stosować strategii A1 - jest ona zdominowana przez strategię A4. Wykreślmy ją:

	B1	B2	B4
A2	2	1	0
A3	1	3	2
A4	1	2	4

Tabela 2.13. Wiele strategii zdominowanych

Więcej strategii zdominowanych już tu nie widzę. Wygląda na to, że uprościliśmy maksymalnie naszą macierz gry. Teraz możemy spróbować znaleźć punkt siodłowy. Z góry uprzedzam, że się to nie uda. Musimy poszukać innej drogi.

Przez długi czas myślałem, że powyższy tekst wyczerpuje zagadnienie dominacji. Okazuje się, że nie. Ciekawie na ten temat piszą Osborne, Rubinstein w 'A Course in Game Theory' (rozdział 4). Jeżeli chcesz wiedzieć więcej zajrzyj tam - nie czuje się na siłach by streszczać ich wywody.

2.4. Gry 2x2

Chwilowo ograniczymy się do niewielkich gier, w których oboje gracze posiadają po dwie strategie. Nazwiemy je *grami 2x2*. Wprowadzimy kilka kolejnych pojęć, a potem rozszerzymy je na gry o większej liczbie strategii.

2.4.1. Strategie czyste i mieszane

czyli co zrobić gdy nie ma punktu siodłowego

Zobaczyliśmy już, że nie każda gra posiada swój punkt siodłowy. Co wówczas robić ? Pokaże to kolejny przykład.

	B1	B2	
A1	7	3	*3*
A2	2	11	2
	7	11	

Tabela 2.14. Macierz gry bez punktu siodłowego

W przedstawionej macierzy wypisane są już wybrane przez graczy liczby. Jak widać są to różne wartości, tak więc punkt siodłowy nie istnieje. Gracz A wybierając strategię A1 gwarantuje sobie wygraną nie mniejszą niż 3. Gracz B grając B1 nie przegra więcej niż 7. Gdzieś między tymi liczbami znajduje się poszukiwane rozwiązanie. Aby je odnaleźć skorzystamy ze *strategii mieszanych*.

Idea stosowania strategii mieszanej jest następująca. Jeżeli przyjmiemy, że np. gracz B będzie ciągle stosował wybraną ze swoich strategii (np. B1), wówczas pozwoli graczowi A na uzyskanie poważnych korzyści. Rozwiązanie narzuca się samo - obaj gracze muszą stosować czasem pierwszą, a czasem drugą ze swoich strategii. Odtąd strategie A1, A2, B1 i B2 będziemy nazywać *strategiami czystymi*. Strategię, która decydować będzie o częstotliwości stosowania strategii czystych, nazwiemy *strategią mieszaną*.

Strategię mieszaną wyznaczamy w następujący sposób (nie przejmuj się, jeżeli zabrzmi to skomplikowanie, gdy zobaczysz przykład to wszystko zrozumiesz):

- *dla gracza A* - odejmij od liczb pierwszej kolumny liczby drugiej kolumny. Bezwzględna wartość pierwszej z liczb określa częstotliwość stosowania strategii A2. Z kolei bezwzględna wartość drugiej z liczb określa częstotliwość stosowania strategii A1.
- *dla gracza B* - odejmij od liczb pierwszego wiersza liczby drugiego wiersza. Bezwzględna wartość pierwszej z liczb określa częstotliwość stosowania strategii B2. Z kolei bezwzględna wartość drugiej z liczb określa częstotliwość stosowania strategii B1.

	B1	B2	
A1	7	3	*A2* : |7-3| = 4
A2	2	11	*A1* : |2-11| = 9
	B2 : |7-2| = 5	*B1* : |3-11| = 8	

Tabela 2.15. Macierz gry - obliczanie strategii mieszanych

Łatwo można się tu pomylić automatycznie przypisując wyliczoną częstotliwość nie tej strategii czystej co trzeba, bo częstotliwości wychodzą "na krzyż". Przypominam też o konieczności narzucenia wartości bezwzględnej.

W przykładowej macierzy wypłat przedstawionej obok, gracz A powinien stosować strategię A1 i A2 w stosunku 9:4, gracz B strategię B1 i B2 w stosunku 8:5. Rzecz jasna, żaden z nich nie może zdradzić kolejności w jakiej stosuje swoje strategie - to bowiem pozwoliłoby przeciwnikowi zagrać lepiej.

Najlepszym wyjściem dla obu graczy jest losowanie strategii z wyliczonymi częstościami. Przy okazji zauważmy, że losowanie nie zawsze jest proste. Pomocny może okazać się rzut monetą, talia kart albo program komputerowy wypluwający "losowe" liczby z potrzebnego nam przedziału.

A morał z tej całej zabawy taki, że w niektórych grach nie ma lekko i ścisły determinizm rozwiązań (znany nam z gier z punktem siodłowym) musi ustąpić miejsca rozwiązaniom probabilistycznym.

2.4.2. Cena gry

Ceną gry nazywamy wypłatę jaką może uzyskać gracz przy założeniu, że zarówno on jak i jego przeciwnik grają najlepiej jak to możliwe. Nie można wygrać więcej niż wynosi cena gry, chyba że przeciwnik gra słabo.

W przypadku gry z punktem siodłowym cena gry jest równa wartości w punkcie siodłowym. W grze 2x2 wymagającej stosowania strategii mieszanej musimy cenę gry obliczyć, pamiętając o tym, że jest ona jednakowa dla obu graczy.

	B1	B2
A1	7	3
A2	2	11

Tabela 2.16. Macierz wypłat - cena gry

Wróćmy do naszej macierzy wypłat. Poprzednio obliczyliśmy, że gracz A powinien stosować strategię A1 i A2 w stosunku 9:4, a gracz B strategię B1 i B2 w stosunku 8:5.

Pisałem, że gracz A wybierając strategię A1 gwarantuje sobie wygraną nie mniejszą niż 3, zaś gracz B grając B1 nie przegra więcej niż 7. Wspomniałem też, że gdzieś między tymi liczbami znajduje się poszukiwane rozwiązanie. Teraz właśnie zajmiemy się jego obliczeniem.

Obliczmy cenę gry dla strategii mieszanej gracza A przeciw strategii B1 gracza B. Cenę gry liczymy jako pewien ułamek. W *liczniku* jest suma dwóch składników. Pierwszy z nich to częstotliwość strategii A1 pomnożona przez wypłatę z pola A1B1. Drugi ze składników to częstotliwość A2 razy odpowiednia wypłata (A2B1). W *mianowniku* mamy sumę częstotliwości stosowania strategii A1 i A2. Hmmm... myślę że najlepiej będzie jeśli przyjrzysz się obliczeniom i porównasz odpowiednie liczby z danymi z macierzy wypłat.

$$\frac{(9*7)+(4*2)}{9+4} = \frac{71}{13}$$

Cena gry dla strategii mieszanej gracza A przeciw strategii B1 gracza B.

Analogicznie wyliczymy cenę gry gracza A przeciw strategii B2, oraz cenę gry gracza B przeciw strategiom A1 i A2. Jak widać cena gry za każdym razem jest taka sama.

$$\frac{(9*3)+(4*11)}{9+4}=\frac{71}{13}$$

Cena gry dla strategii mieszanej gracza A przeciw strategii B2 gracza B.

$$\frac{(8*7)+(5*3)}{5+8}=\frac{71}{13}$$

Cena gry dla strategii mieszanej gracza B przeciw strategii A1 gracza A.

$$\frac{(8*2)+(5*11)}{5+8}=\frac{71}{13}$$

Cena gry dla strategii mieszanej gracza B przeciw strategii A2 gracza A.

2.5. Gry 2xN

Gry 2xn różnią się od omówionych już gier 2x2 tym, że jeden z graczy ma do swojej dyspozycji więcej niż dwie strategie czyste. Rozwiązaniem takiej gry jest albo punkt siodłowy, albo strategia mieszana złożona z dwóch strategii czystych.

Do rozwiązywania gier 2xn konieczna jest umiejętność rozwiązywania gier 2x2. Jeżeli jeszcze jej nie opanowałeś, wróć do poprzedniej części kursu.

Rozwiązanie tradycyjnie już zaczynamy od poszukiwania punktu siodłowego[5]. W przypadku jego braku mamy do wyboru dwie metody postępowania. Pierwsza z nich - jak najsłuszniej zwana rachunkową - prowadzi do celu drogą usłaną żmudnymi obliczeniami. Druga - metoda graficzna - pozwala na szybkie i finezyjne przeskoczenie nudnych rachunków, choć wymaga umiejętności rysowania w miarę prostych kresek (linijka mile widziana).

O ile nie masz problemów z koordynacją i potrafisz posługiwać się linijką i ołówkiem, to polecam Ci tę drugą metodę. Jeżeli jednak nade wszystko lubisz dodawać i mnożyć, to metoda rachunkowa wprawi Cię w nieopisany zachwyt. ;)

2.5.1. Metoda rachunkowa

Na początek krótki opis tego co nas czeka. Po pierwsze szukamy punktu siodłowego. Jeżeli go znajdujemy, to możemy odetchnąć z ulgą. Jeżeli jednak go nie ma musimy brnąć dalej. W kolejnym kroku odrzucamy strategie, które z punktu widzenia danego gracza są podporządkowane innym strategiom. Teraz układamy z pozostałych strategii gry 2x2 aż do momentu gdy znajdziemy wśród nich grę spełniającą pewne szczególne wymagania.

Przejdźmy do przykładu:

	B1	B2	B3	B4
A1	-4	-2	3	4

[5] o wyrzuceniu strategii zdominowanych chyba nie muszę przypominać, co ?

A2	6	5	0	1

Tabela 2.17. Metoda rachunkowa - macierz gry 2xn

Wystarczy rzut oka na przedstawioną macierz wypłat aby zorientować się, że kryjąca się pod jej postacią gra nie posiada punktu siodłowego.

Szukamy teraz strategii podporządkowanych. Gracz B z pewnością zauważy że nie opłaca mu się nigdy stosować strategii B4 gdyż przynosi mu ona wyniki słabsze od strategii B3, niezależnie od tego, jakiej strategii użyje jego przeciwnik. Zapominamy więc o istnieniu strategii B4 i ponownie przyglądamy się macierzy wypłat.

	B1	B2	B3
A1	-4	-2	3
A2	6	5	0

Tabela 2.18. Metoda rachunkowa - macierz gry 2xn po usunięciu strategii zdominowanej

Z trzech pozostałych strategii gracza B można ułożyć 3 różne gry 2x2 (ogólnie - z gry 2xn można utworzyć (n*(n-1))/2 gier 2x2). Gry tworzymy odrzucając odpowiednią ilość strategii gracza B. W przypadku tej gry (o rozmiarze 2x3) za każdym razem odrzucamy jedną strategię gracza B - ja postanowiłem za pierwszym razem wyrzucić B3, za drugim B2, za trzecim B1.[6] W przypadku gry 2x4 za każdym razem należałoby odrzucić dwie strategie, w grze 2x5 trzy itd.

A oto i wspominane gry 2x2:

	B1	B2
A1	-4	-2
A2	6	5

Tabela 2.19. Metoda rachunkowa - podmacierz 2x2 gry 2xn

	B1	B3
A1	-4	3
A2	6	0

Tabela 2.20. Metoda rachunkowa - podmacierz 2x2 gry 2xn

	B2	B3
A1	-2	3
A2	5	0

Tabela 2.21. Metoda rachunkowa - podmacierz 2x2 gry 2xn

[6] Jak się pewnie domyślasz, kolejność nie ma tu znaczenia.

Bierzemy pierwszą z gier 2x2 - tę do konstrukcji której wzięliśmy strategie B1 i B2 gracza B. Jej rozwiązaniem jest punkt siodłowy. Gracz A powinien stosować tylko strategię A2, gracz B wyłącznie strategię B2. Cena tej gry jest równa 5.

Teraz korzystając z wyliczonych dla gracza A częstotliwości (0:1) liczymy cenę gry przeciw pozostałym strategiom gracza B. Jeżeli choć raz wyliczona cena gry przeciw jednej z pozostałych strategii gracza B będzie niższa od ceny badanej gry 2x2, wówczas dana gra 2x2 nie zawiera rozwiązania całej gry 2xn. Skomplikowane ? Nie, ale dość uciążliwe. Zobaczmy jak to wygląda w praktyce.

W tym przypadku mamy tylko jedną "pozostałą" strategię - B3 mianowicie. Liczymy ile wynosi cena gry przeciw tej strategii, gdyby gracz A użył swojej strategii mieszanej (0:1). Cena tej gry wynosi:

$$\frac{(0*3)+(1*0)}{0+1}=0$$

Cena gry przeciw strategii B3.

To mniej niż cena wyjściowej gry 2x2. Rozwiązania musimy więc szukać w kolejnych grach. Weźmy teraz grę 2x2 ze strategiami B1 i B3 gracza B:

	B1	B3
A1	-4	3
A2	6	0

Tabela 2.22. Metoda rachunkowa - podmacierz 2x2 gry 2xn

Gra nie posiada punktu siodłowego. Policzmy częstotliwość z jaką gracze powinni stosować swoje strategie:

	B1	B2	
A1	-4	3	*A2* : |-4-3| = 7
A2	6	0	*A1* : |6-0| = 6
	B3 : |-4-6| = 10	*B1* : |3-0| = 3	

Tabela 2.23. Macierz gry - obliczanie strategii mieszanych

Otrzymaliśmy, że gracz A powinien stosować swoje strategie A1, A2 w stosunku 6:7, a gracz B strategie B1, B3 jak 3:10. Cena tej gry wynosi: 18/13. Liczymy teraz cenę gry przeciw pozostałym strategiom - w tym przypadku mamy tylko jedną taką strategię, mianowicie B2. Wyliczona cena przeciw strategii B2 wynosi: 23/13. Tak więc ta gra 2x2 spełnia nasze kryterium, a jej rozwiązanie jest zarazem rozwiązaniem całej gry 2xn.

Przenosząc rozwiązanie gry 2x2 na wyjściową grę 2xn możemy napisać że gracz A powinien stosować swoje strategii jak A1:A1 jak 6:7, a gracz B swoje B1:B2:B3:B4 jak 3:0:10:0.

Metoda rachunkowa przy większej ilości strategii jest bardzo uciążliwa w użyciu7. W tym przypadku musieliśmy dla każdej gry 2x2 mieliśmy tylko jedną "pozostałą" strategię, dla której musieliśmy liczyć cenę gry. Dla gier większych byłoby to bardziej kłopotliwe. Na szczęście można ułatwić sobie zadanie korzystając z metody graficznej.

7za to łatwo ją zaimplementować na komputerze, bo algorytm do skomplikowanych nie należy

2.5.2. Metoda graficzna

Jeżeli czujesz się przytłoczony ilością wykonanych przed chwilą rachunków to metoda graficzna powinna Ci przypaść do gustu. Aby z niej skorzystać wystarczy umieć rozwiązywać gry 2x2, a to przecież małe piwo. :-)

Skrypt prezentujący rozwiązywanie zadań metodą graficzną znajdziesz tutaj [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#programy_dwieosoby].

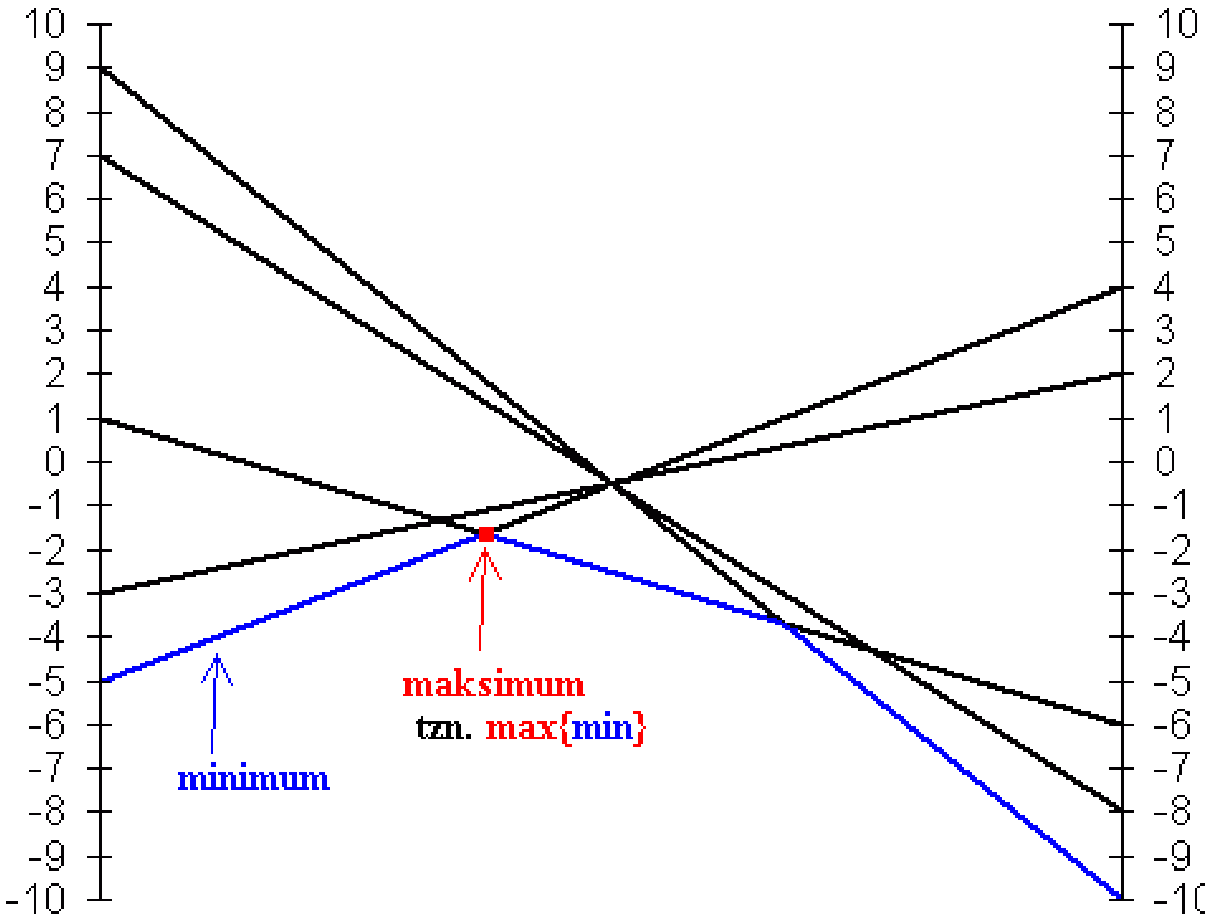
Pomyśl że miałbyś rozwiązać poniższą grę metodą rachunkową... eh... mi by się nie chciało...

	B1	B2	B3	B4	B5
A1	9	-5	7	1	-3
A2	-10	4	-8	-6	2

Tabela 2.24. Metoda graficzna - macierz gry 2xn

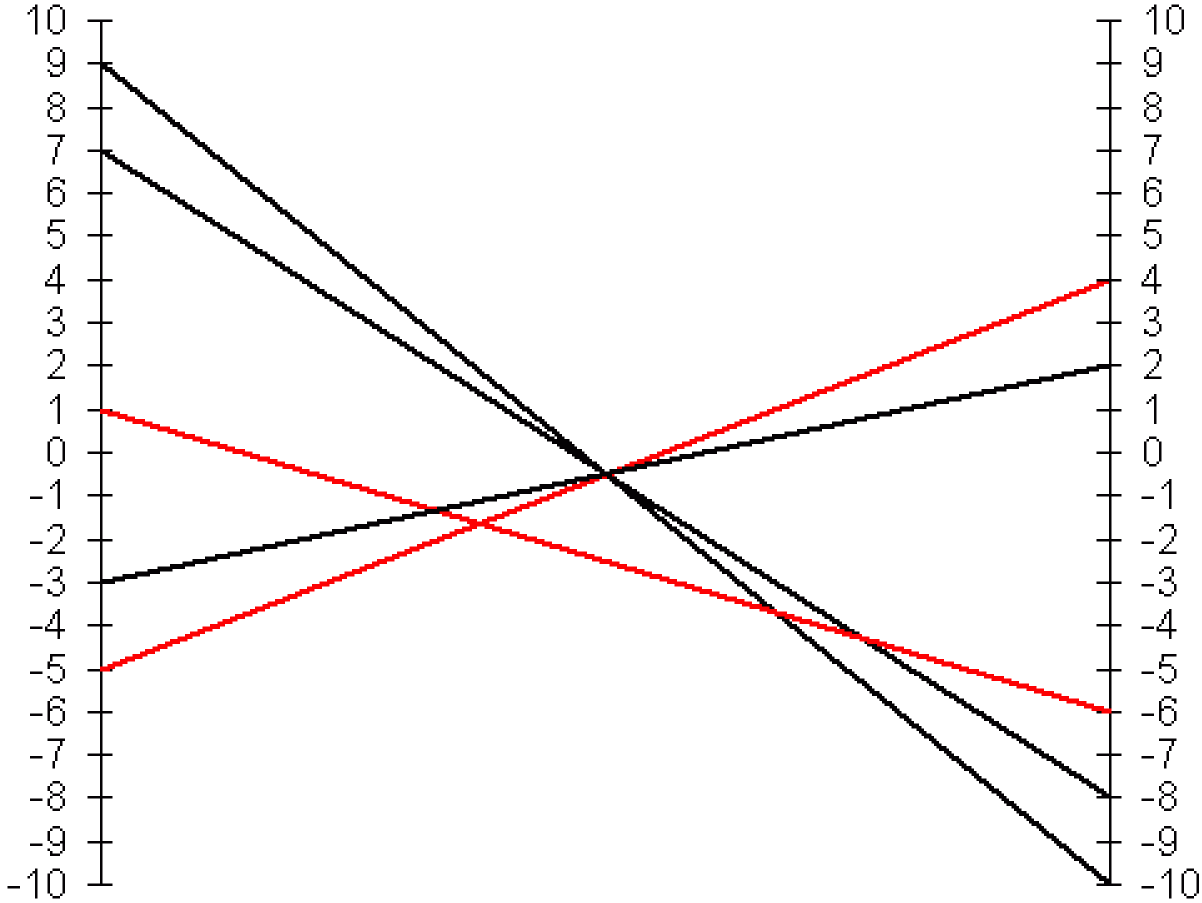
Poradzimy sobie tak. Narysuj dwie pionowe osie. Teraz bierzesz po kolei strategie gracza B. Liczbę z pierwszego wiersza odkładaj na lewej osi, liczby z drugiego na prawej, a następnie połącz oba punkty. Na przykład dla strategii B1 - bierzesz liczbę 9, zaznaczasz ją na lewej osi, potem bierzesz -10, zaznaczasz na prawej i rysujesz krechę od jednego punktu do drugiego. Zrób tak dla wszystkich pięciu par.

Teraz znajdujesz najwyżej położony punkt dolnego konturu otrzymanej plątaniny linii. Spokojnie, bez nerwów - jeżeli poprzednie zdanie jest niejasne, spójrz na rysunek i przeczytaj znajdujący sie pod nim opis. Wówczas zrozumiesz co to takiego ów "najwyżej położony punkt dolnego konturu otrzymanej plątaniny linii". :)



Metoda graficzna rozwiązywania gier 2xn.

Z otrzymanej plątaniny prostych wybierasz *najniżej* położone punkty - na rysunku zaznaczono je na niebiesko. Następnie znajdujesz punkt leżący *najwyżej* na niebieskiej krzywej. Teraz wystarczy już tylko zidentyfikować dwie proste, na przecięciu których leży ten punkt - w tym przypadku są to proste *B2* i *B4* (prostych przecinających ten punkt może być więcej, ale wystarczy zidentyfikować dwie z nich).



Metoda graficzna rozwiązywania gier 2xn.

Teraz konstruujesz grę 2x2 dla strategii B2 i B4.

	B2	B4
A1	-5	1
A2	4	-6

Tabela 2.25. Metoda graficzna - podmacierz 2x2

Rozwiązujesz ją ...i oto masz rozwiązanie całej gry 2xn !

W tym przypadku okazuje się, że gracz A powinien stosować strategie A1:A2 w stosunku 10:6, a gracz B swoje B1:B2:B3:B4:B5 w stosunku 0:7:0:9:0

Gdy już ochłoniesz po zderzeniu z prostotą metody graficznej to przyjrzyj się jej uważnie. Na pewno zauważysz, że w zasadzie sposób postępowania jest identyczny jak w metodzie rachunkowej... tylko o ileż prostszy ! I o to chodzi.

2.5.3. Podsumowanie - czego się dowiedziałeś

Nauczyłeś się rozwiązywać dwuosobowe gry sumie zerowej rozmiaru 2xn. Poznałeś sposób ich zapisu przy pomocy macierzy wypłat, dowiedziałeś się jak szukać punktu siodłowego i jak znajdować strategię zdominowane. Na końcu zobaczyłeś dwie metody rozwiązywania gier 2xn

Rozdział 3. Gry o sumie niezerowej

> Winning doesn't mean beating one's opponent; it means getting the most according to one's own value system, i.e., maximizing one's expected payoff.
>
> — Schelling, "Strategy of Conflict", 1960

W grach o sumie niezerowej wielkość wygranej jednego z graczy nie jest bezwzględnie równa przegranej drugiego. Innymi słowy, przy zastosowaniu wybranych przez graczy strategii może dojść do sytuacji, w której np. oboje wygrywają pewną wygraną. Nie mamy tu więc do czynienie z sytuacją czystego konfliktu, ale raczej z pewną niezgodnością interesów - gracze nie rywalizują o jedno dobro, czasem jest im ze sobą po drodze, a czasem wcale nie.

	B1	B2
A1	2, 3	-1, 4
A2	3, -6	4, 5

Tabela 3.1. Macierz gry o sumie niezerowej

W przypadku gier o sumie niezerowej macierz wypłat wygląda właśnie tak - w każdej kratce znajdują się dwie liczby: pierwsza oznacza wypłatę gracza A, druga gracza B. Przykładowo jeżeli w przedstawionej grze gracz A zastosuje strategię A1, a gracz B strategię A2, to wypłata gracza A wyniesie -1, a gracza B 4.

Warto tu przypomnieć sobie uwagi jakie poczyniłem w pierwszym rozdziale. Pisałem tam o tym, że teoria gier posługuje się uproszczonym modelem sytuacji konfliktowej - w tej chwili interesować nas będzie założenie, że gracza obchodzi wyłącznie jego zysk. W rzeczywistości sprawa nie jest tak proste.

Spójrzmy na powyższą macierz wypłat. Jeżeli gracz A gra zgodnie z tym założeniem, a więc interesuje go wyłącznie *maksymalizacja własnego zysku* wówczas szybko dojdzie do wniosku, że strategia A2 dominuję strategię A1, bo zawsze przynosi mu wyższą wypłatę. A co jeżeli celem gracza A nie jest zgarnięcie jak najwyższej wypłaty, ale uzyskanie jak największej przewagi nad przeciwnikiem ? Jak wówczas powinien zagrać ? Chyba opłacałoby mu się wówczas grać strategią A1, bo gwarantuje sobie w ten sposób, że zyska przynajmniej o 2 jednostki więcej niż przeciwnik, podczas gry grając A2 mógłby nawet zyskać mniej od przeciwnika. Możemy sobie wyobrazić również inną sytuację - oto gracze postanawiają grać tak, by maksymalizować wspólny zysk, tj. aby suma wypłat była maksymalna. Wówczas powinni stosować strategię A2, B2.

Morał z tego taki: teoria teorią, model modelem, a życie życiem. Nie zapomnij o tym ! A jeżeli chcesz wiedzieć jak naprawdę grają ludzie i na ile modele teorii gier zgodne są z życiem, poszukaj opracowań z pogranicza psychologii i teorii gier. W Polsce zajmuje się tym m.in. prof. Kozielecki piszący książki o teorii podejmowania decyzji.

3.1. Podsumowanie - czego się dowiedziałeś

Przede wszystkim poznałeś różnicę dzielącą gry o sumie zerowej od gier o sumie niezerowej.

Rozdział 4. Dylemat wspólnych zasobów

Nazwa problemu pochodzi od tytułu pochodzącego z 1968 roku artykułu Hardin - *"Tragedy of the Commons"* 8. Słowo *commons* oznacza tu wspólny zasób używany/eksploatowany przez pewną grupę9. A *tragedy* (na polski tłumaczone raczej jako dylemat niż tragedia)... no cóż, zaraz się przekonamy gdzie tu tkwi dylemat. Na razie zacznijmy od tego, że rozważania Hardina znajdują szerokie zastosowanie - m.in. w odniesieniu do eksploatacji środowiska naturalnego (połowy ryb, zapobieganiu zanieczyszczeniom itp.). Krótko mówiąc - poznając istotę dylematu wspólnych zasobów z pewnością nie będziesz tracił czasu. :)

Zaczynamy od klasycznego przykładu przedstawionego przez Hardina.

4.1. Krowy i pastwisko

Jest pięciu gospodarzy. Każdy z nich posiada 2 krowy. Gospodarze mogą wypasać swoje krowy na wspólnym pastwisku. Każdy z gospodarzy posiada 3 strategie - może na wspólnym pastwisku wypasać 1, 2 lub 0 krów. Wypłata w tej grze mierzona jest ilością paszy jaką krowa(-y) zjedzą ze wspólnego pastwiska - im więcej zjedzą tym lepiej dla gospodarza, bo będzie musiał im kupić mniej paszy. Wypłata jest więc równa ilości krów danego gospodarza na pastwisku pomnożonej przez ilość trawy jaką każda z nich zje. Umówmy się, że ilość trawy mierzyć będziemy w bliżej niesprecyzowanych *jednostkach*.

Oczywiście pastwisko ma ograniczoną powierzchnie. A to powoduje, że im więcej krów pożywia się rosnącą na nim trawą tym mniejsza jego "wydajność". No po prostu - im więcej krów skubie trawę tym mniejsza porcja przypada na każdą z nich..

No to naszkicujmy macierz wypłat dla tej gry. Ze względu na to, że graczy jest aż pięciu, będzie się ona nieco różniła od tych, które znamy, ale ważne jest to, że znajdą się na niej wszystkie możliwe kombinacje strategii wszystkich graczy. Jak to zrobić ? Wystarczy zauważyć, że każdy z graczy jest identyczny - tzn. ma takie same strategie. Poniższa macierz, stworzona z myślą o dowolnym z nich, rozpatruje więc sytuację każdego z pięciu gospodarzy.

		ilość cudzych krów na pastwisku								
		0	1	2	3	4	5	6	7	8
ilość własnych krów	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	11	10	9	8	7	6	5	4	3
	2	20	18	16	14	12	10	8	6	4

Tabela 4.1. Tragedia wspólnych zasobów - krowy i pastwisko

Na pierwszy rzut oka widać, że strategie wypasu dwóch krów dominuje nad pozostałymi. Każdemu z gospodarzy z osobna opłaca się więc wypuścić na pastwisko obie krowy. Ale... no właśnie, zauważmy co wówczas się stanie. Jeżeli każdy z nich zastosuje strategię "dwóch krów" wówczas każdy otrzyma wypłatę leżącą na przecięciu kolumny oznaczonej cyfrą 8 i wiersza oznaczonego cyfrą 2 - a więc tylko 4 jednostki. A gdyby każdy z nich

8Artykuł ten poświęcony jest problemowi przeludnienia Ziemi. Poszperaj w sieci, bez trudu można go znaleźć w wersji oryginalnej. Warto przeczytać.

9W Anglii commons oznaczało ziemię należącą do gminy (common area), czyli wspólny obszar, na którym mogło się paść bydło i owce.

zastosował strategię wypasu jednej krowy, wówczas każdy otrzymałby wypłatę leżącą na przecięciu kolumny 4 i wiersza 1 - a więc 7 jednostek.

I oto zbliżamy się do sedna sprawy. Wszystkim razem opłacałoby się stosować strategię wypasu jednej krowy, ale każdemu z osobna opłaca się wypasać 2 krowy. Wyobraźmy sobie następującą sytuację - czterej gospodarze wypasają po jednej krowie, a jeden wypasa obie - ten jeden, który się wyłamie, zarobi 12 jednostek, pozostali tylko po 6. I na tym polega perfidia tego problemu - mimo że działanie "dla dobra ogółu" byłoby korzystne dla wszystkich, to jednak każdy z osobna nie ma bodźców do solidarnego postępowania. Najwięcej bowiem zyskuje ten, który wyłamie się ze współpracującej ze sobą koalicji - zyska wówczas bardzo dużo kosztem pozostałych. Istotą *dylematu wspólnych zasobów* jest więc konflikt między indywidualną racjonalnością a wspólnym interesem.

Przygotowałem prosty skrypt w PHP ilustrujący przebieg tej "gry" w zależności od wyboru strategii przez każdego z gospodarzy. Znajdziesz go tutaj [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#programy_wieleosob].

Jeżeli skorzystałeś z powyższego skryptu, to już z pewnością wiesz na czym polega problem. Powstaje pytanie czy można zapobiec tej ewidentnie niekorzystnej sytuacji. Owszem można - zmieniając warunki gry. Oto przykładowe możliwości:

- prywatyzacja zasobu - gdy każdy z gospodarzy będzie wypasał na swoim, zniknie źródło problemów
- licencje
- umowy
- zakazy usuwające pewne strategie - przykładem takiego zakazu jest np. zakaz połowów małych rybek

Rozważania nad problemem Hardina mają również swoje implikacje natury hmm... światopoglądowej. Otóż zwolennicy kapitalizmu na przykładzie dylematu wspólnych zasobów dowodzą, że prywatna własność to jest to.10

4.2. Podsumowanie - czego się dowiedziałeś

Czytając ten rozdział dowiedziałeś się mnóstwa ciekawych rzeczy. Przede wszystkim zwiększyłeś swoją wiedzę z zakresu wypasu bydła. :) Po drugie, zagłębiłeś się w odwieczny dylemat wyboru między dobrem własnym a grupowym. Poznałeś na czym polega dylemat wspólnych zasobów, oraz przyjrzałeś się dokładniej klasycznej jego wersji.

10Specjalnie potraktowałem ten problem tak skrótowo - nie zamierzam bowiem rozwodzić się nad czymś, o czym nie mam większego pojęcia. Sygnalizuję tylko, że takie coś istnieje, a zainteresowanych odsyłam do sieci po wyczerpujące to zagadnienie materiały.

Rozdział 5. Dylemat więźnia

Dylemat więźnia jest najbardziej znanym przykładem gry o sumie niezerowej. Historyjka jest następująca. Dwóch znanych policji przestępców złapano w kradzionym aucie. Podejrzewa się ich o popełnienie dużo poważniejszego przestępstwa (zbrodni), na co jednak nie ma żadnych dowodów. Przestępcy są przesłuchiwani w osobnych celach bez możliwości komunikowania się ze sobą. Przesłuchujący ich komisarz wpada na pewien pomysł - proponuje im nagrodę za wsypanie wspólnika i dostarczenie dowodów na jego udział w zbrodni. Możliwe są trzy sytuacje:

a. oboje milczą - wówczas oboje otrzymują niewielki wyrok za kradzież auta

b. jeden się przyznaje i wsypuje wspólnika - zdrajca wychodzi na wolność, jego kompan (tzw. *frajer*) otrzymuje wyrok za kradzież i za popełnienie zbrodni

c. oboje się przyznają i wsypują wspólnika - oboje otrzymują karę za kradzież i popełnienie zbrodni, nieco złagodzoną ze względu na współpracę z wymiarem sprawiedliwości

W teorii gier zapisalibyśmy tę sytuację w postaci macierzy wypłat. Strategia *C (cooperation)* oznacza współpracę (między graczami), czyli milczenie. Strategia *D (defection)* oznacza zdradę, czyli wsypanie wspólnika. Oto nasza macierz:

	C	D
C	R, R	S, T
D	T, S	P, P

Tabela 5.1. Dylemat więźnia - ogólna macierz gry

Znaczenie poszczególnych liter w macierzy gry jest następujące:

- *R* (reward) - nagroda za współpracę (czyli kara wyłącznie za kradzież auta)
- *S* (sucker's payoff) - kara za kradzież i zbrodnię (*wypłata frajera*)
- *T* (temptation to defect) - kara za kradzież auta złagodzona za wsypanie wspólnika (*zachęta do zdrady*)
- *P* (punishment) - kara za obopólną zdradę - czyli kara kradzież i zbrodnię złagodzona ze względu na współpracę z wymiarem sprawiedliwości

Aby taką grę uznać za dylemat więźnia muszą być spełnione pewne zależności między wysokościami poszczególnych wypłat w macierzy:

a. T > R > P > S

b. 2 * R > S + T

Tłumacząc to "z matematycznego na nasze" :) można powiedzieć, że:

a. kara, którą ponosi frajer, musi być odpowiednio wysoka

b. suma uniewinnień musi być większa od sumy *pełnego wymiaru kary* i *zachęty do zdrady*

Wysokość poszczególnych wypłat jest nieistotna. Ważne, by spełnione były powyższe warunki. Przykładowa macierz dylematu więźnia może wyglądać tak (łatwo sprawdzisz, że spełnia ona podane wyżej warunki):

	C	D
C	4, 4	0, 5
D	5, 0	2, 2

Tabela 5.2. Dylemat więźnia - przykładowa macierz gry

Wypłaty w niej są umowne - można je traktować np. jako liczbę lat, jaką przestępca spędzi na wolności, w ciągu najbliższych 5 lat.

Patrząc na macierz wypłat trudno ukryć zdziwienie prostotą tej gry. A przecież tkwi tu poważny haczyk... Nieprzypadkowo dylemat więźnia stał się podstawą wielu badań prowadzonych w naukach społecznych.

Z łatwością można zauważyć, że dla obu graczy strategia zdrady (D) jest dominująca. Prowadzi to do równowagi DD - a przecież na pierwszy rzut oka widać, że oboje lepiej wyszliby zgodnie współpracując ze sobą ! W ten sposób doszliśmy do sedna sprawy - do konfliktu pomiędzy troską o własny zysk, a troską o "dobro grupy".

5.1. Rozgrywka jednokrotna

W przypadku rozgrywki jednorazowej praktycznie wszystko jest jasne - grający na współpracę jest frajerem. Jedynym rozsądnym wyjściem jest zdrada. Jest to sytuacja dosyć absurdalna, zważywszy na fakt, że powoduje ona przegraną obu graczy, w sytuacji, w której w prosty sposób mogliby zarobić (grając solidarnie "współpraca").

5.2. Rozgrywka wielokrotna

Po pierwsze zwróćmy uwagę na fakt, że w przypadku gdy gracze znają ilość rozgrywanych gier, rozgrywka wielokrotna przestaje się różnić od jednokrotnej ! Zacznijmy nasze rozważania od końca, od ostatniej, n-tej kolejki. Skoro gracz wie, że jest to ostatnia gra, to pragnąc zmaksymalizować swoje zyski nie ma wyjścia. Musi grać D (zdrada), bowiem rozsądnie jest zakładać, że grając C (współpraca) wyjdzie na frajera - jego przeciwnik z pewnością zdradzi. Skoro wiadomo co się stanie w ostatniej kolejce (oboje zdradzą) analogiczne rozumowanie można przeprowadzić dla kolejki przedostatniej. Znów okaże się, że jedynym rozsądnym wyjściem dla obu graczy jest zdrada. I tak dalej - aż do początku rozgrywki.

Jak widać rozgrywka wielokrotna ma sens jedynie wówczas, kiedy gracze nie wiedzą kiedy nastąpi jej koniec.

Odpowiedź na pytanie o najkorzystniejszą strategię w grze w iterowany dylemat więźnia jest trudne. Zdradzić czy grać na współpracę ? A jeżeli nadziejemy się na zdradę drugiego gracza, to jak zachować się w kolejnym spotkaniu ? Odpłacić mu, czy też puścić płazem ?

Omawiając ten problem nie sposób pominąć znanego doświadczenia Roberta Axelroda, który przeprowadził następującą próbę. Otóż poprosił on osoby interesujące się teorią gier o zaproponowanie różnych strategii gry w dylemat więźnia. W sumie zgromadził w ten sposób 63 graczy, a raczej 63 strategie - od prostych po bardzo skomplikowane. Następnie zorganizował turniej, w którym programy te grały przeciwko sobie. Turniej wygrała prosta strategia autorstwa kanadyjskiego politologa Anatola Rapoporta. Strategię ochrzczono mianem *Tit-for-Tat* (wet za wet), a jej schemat postępowania wygląda następująco:

a. każdą rozgrywkę zaczynaj od współpracy

b. w następnych kolejkach wybieraj tę, którą drugi gracz zagrał w poprzedniej kolejce

Po dokładnym omówieniu wyników, Axelrod zorganizował drugą rundę turnieju. Biorący w niej udział zawodnicy nadesłali kolejne programy czerpiąc z doświadczeń rundy poprzedniej i... WET ZA WET znów okazał się najlepszy ! Axelrod przeprowadził dokładną analizę nadesłanych programów i doszedł do wniosku, że wśród plasujących się w czołówce, większość wyróżniała się następującymi cechami:

a. przyjazna - nie zdradza jako pierwsza

b. odwetowa - za zdradę karze zdradą

c. przebaczająca - po ukaraniu zdrady wyciąga rękę na zgodę

d. przejrzysta - jej decyzje powinny być spójne i łatwe do przewidzenia

5.3. Inne strategie

Warto się też przyjrzeć innym uczestnikom turnieju (tłumaczenia tych nazw na polski znajdziesz w *słowniczku*):

a. *Always cooperates* - niezależnie od działań przeciwnika zawsze idzie na współpracę

b. *Always defects* - niezależnie od działań przeciwnika zawsze zdradza

c. *PROSTODUSZNY TESTER* - w zasadzie zachowuje się jak WET ZA WET ale od czasu do czasu niespodziewanie zdradza

d. *TESTER SKRUSZONY* - zachowuje się podobnie do PROSTODUSZNEGO TESTERA, z tym że po własnej zdradzi godzi się na jedną niekontrowaną zdradę ze strony przeciwnika

e. *Grim-trigger* - początkowo idzie na współpracę, ale raz zdradzony zawsze zdradza

f. *Tit-for-two-tats* - wybacza jedną zdradę, odpłaca się dopiero za drugą

Zauważmy, że nie wszystkie z wymienionych strategii spełniają wymienione powyżej warunki. Niektóre z nich są *wredne*, tj. zdradzają niesprowokowane. Inne z kolei *nie przebaczają* (w związku z czym istnieje spora szansa, że rozgrywka z ich udziałem sprowadzi się do ciągłych obustronnych zdrad).

Wyniki konkursów Axelroda są bardzo interesujące. W drugiej rozgrywce 14 spośród pierwszych 15 miejsc zajęły strategie uprzejme. Odwrotna proporcja panowała w ostatniej piętnastce - tu znalazła się tylko jedna taka strategia.

5.4. I co z tego wynika ?

Czy możemy więc postawić tezę o wyższość strategii uprzejmych nad wrednymi ? Czy możemy obwołać WET ZA WET absolutnym tryumfatorem ? Nie, nie możemy. Warto zauważyć, że w pewnej konfiguracji strategii biorących udział w turnieju WET ZA WET nie wygrałby. Byłoby tak w przypadku, gdyby oprócz niego wszystkie pozostałe strategii były wredne.

Warto przyjrzeć się uczestnikom turnieju Axelroda odwołując się do pojęcia *strategii ewolucyjnie stabilnej*. Jeżeli nie czytałeś jeszcze tekstu poświęconego zastosowaniu teorii gier w biologii, to zrób to teraz, a potem wróć tutaj.

Jeżeli czytasz to zdanie, to zakładam, że przeczytałeś już tekst omawiający grę w jastrzębie i gołębie i orientujesz się w zagadnieniu strategii ewolucyjnie stabilnej. Przypomnę tylko za Dawkinsem, że strategię ewolucyjnie stabilną ...

> ... definiuje się jako taką strategię, której od momentu gdy zostanie przyjęta przez większość członków populacji, nie jest w stanie wyprzeć żadna inna strategia alternatywna.
>
> —Richard Dawkins

Axelrod wykonał kolejne doświadczenie, w którym wzięły udział 63 strategie zgłoszone do drugiej rundy turnieju. W trzecim turnieju zasady były nieco inne, a badaniu podlegała właśnie ewolucyjna stabilność poszczególnych strategii. Oddajmy głos Dawkinsowi:

> Axelrod wprowadził te 63 strategie do komputera, stwarzając tym samym "pokolenie nr 1" w ewolucyjnym następstwie pokoleń. W pokoleniu nr 1 na "aurę" składały się wszystkie 63 strategie w równych proporcjach. pokolenie to zakończyło się wypłaceniem każdej strategii jej wygranej, lecz nie w pieniądzach czy punktach, ale w potomstwie, tożsamym z ich (bezpłciowymi) rodzicami. Z każdą mijającą generacją pewne strategie stawały się coraz rzadsza, aż w końcu zanikały. Inne zaś stawały się liczniejsze. Toteż wraz ze zmieniającymi się proporcjami zmieniała się i "aura", w jakiej przebiegały kolejne rundy gry.

Dokładne omówienie wyników konkursu i interesujące rozważania na temat ewolucyjnego powodzenia poszczególnych rodzajów strategii znajdziesz w "Samolubnym genie" Dawkinsa. Tutaj powiemy tylko, że turniej ten wygrały strategie cechujące się *uprzejmością* (tj. te, które nie zdradzają jako pierwsze) - po wielkiej liczbie powtórzeń gry tylko one zostały na placu boju, a że wszystkie są uprzejme, więc ich rozgrywki polegały na ciągłej *współpracy* 11. Jednak żadna z nich nie zasługuje na miano ewolucyjnie stabilnej, bo zdominowana przez nią populacja jest podatna na inwazje innych uprzejmych strategii.

Konkurs typu "ewolucyjnego" doczekał się różnych wariantów. Najciekawszy wydaje się ten, w którym dopuszcza się możliwość "pomyłki". Zauważmy, że zdarza się nam zrobić od czasu do czasu coś niezgodnego z naszymi zamierzeniami - czy to przez nieuwagę czy też z powodu chwilowego kaprysu. Podobne zachowania wprowadzono w ramy eksperymentu przyjmując, że każdy osobnik stosuje swoją strategię z pewnym prawdopodobieństwem. Przykładowo - osobnik A w 99% procentach przypadków stosuje strategię *wet-za-wet*, ale wyjątkowo - w 1% przypadków - zdarza mu się grać strategią *zawsze zdradzaj*.

5.5. Przestrzenny dylemat więźnia

Wspominany już wcześniej Axelrod wpadł też na pomysł rozegrania nieco innego turnieju. Podstawą pomysłu była obserwacja, że starcia typu "każdy z każdym" nie oddają najlepiej procesów zachodzących w rzeczywistości (np. w kontaktach międzyludzkich). W większości przypadków kontaktujemy się tylko z tymi, którzy przebywają w naszym pobliżu. Z tego prostego spostrzeżenia narodził się *przestrzenny dylemat więźnia (SPD)*.

Idea jest następująca. Rozłóżmy naszych graczy na przestrzennej siatce 12 , tak aby każdy z nich miał dokładnie 4 sąsiadów. Następnie każdy gracz rozgrywa z każdym ze swoich sąsiadów jedną rundę gry w dylemat więźnia korzystając z właściwej mu strategii. Po 4 takich grach (jedna z każdym sąsiadem) gracz podlicza swoją wypłatę. Następnie spogląda na wypłaty swoich sąsiadów. Jeżeli znajdzie wśród nich osobnika, który wygrał więcej od niego, w kolejnej rundzie zastosuje taką strategią, jaką ów osobnik stosował w rundzie ostatniej. Proste, nie ?

W wyniku wielokrotnych rozgrywek przeżyją tylko strategie najlepsze - a więc takie, które przynoszą swoim graczom wypłaty większe od innych.

Istnieją pewne charakterystyczne stany, do których może dojść cały układ. Zazwyczaj następuje grupowanie się strategii w skupiska.

11Przypominam, że mówimy o wielokrotnej rozgrywce dylematu więźnia, w której gracze mogą zdradzać albo współpracować

12"przestrzenna siatka" nieuchronnie przenosi nas myślą na terytorium, którego badaniem zajmują się specjaliści od *automatów komórkowych*. Polecam dobrą stronę autorstwa dr K. Malarza [http://www.zis.agh.edu.pl/ak/] poświęconą tymże automatom.

Eksperyment Axelroda (w którym użył on tych samych 63 strategii, które zgłoszono do oryginalnego turnieju) niezależnie od początkowego (losowego) rozrzucenia "graczy" na płaszczyźnie zawsze kończył się takim samym wynikiem - wszyscy gracze grali na współpracę, skutkiem czego dalsza ewolucja układu była niemożliwa.

Oczywiście sama rozgrywka za każdym razem przebiegała inaczej, w zależności od ilości i rozmieszczenia strategii złośliwych. Niemniej jednak końcówka należała do łagodnych. Ze względu na to, że w pewnym momencie strategie grające w pierwszym ruchu "współpracuj" stają się od siebie nierozróżnialne, trudno tu mówić o "najlepszej" strategii.

Zauważmy, że istnieją znaczące różnice pomiędzy przestrzennym a ewolucyjnym wariantem eksperymentu. W wariancie przestrzennym mianowicie, ze względu na rozprzestrzenienia się strategii wśród sąsiadów, strategia będzie często grała przeciw samej sobie.

5.6. Ludzie w dylemacie więźnia

Wiele sytuacji z życia codziennego można sprowadzić do gry w dylemat więźnia. Często stajemy przed wyborem między zachowaniem korzystnym dla nas, a takim, które jest korzystne dla grupy. Bardzo interesujące spostrzeżenia w tej mierze zawiera książka Matta Ridleya "O pochodzeniu cnoty" (kup, przeczytaj, nie pożałujesz). Nie zamierzam jej tu streszczać, ograniczę się tylko do jednej uwagi

W życiu bywamy zmuszani do gry w dylemat więźnia. Czasem po prostu nie mamy wyjścia. Ale często mamy możliwość wyboru osób, z którymi wdajemy się w rozgrywkę. Dysponujemy więc potężną bronią - ostracyzmem - która pozwala nam na pozbawienie potencjalnych zdrajców jakichkolwiek zysków z gry. Po prostu - nie gramy z nimi i już. Przeprowadzane eksperymenty dowodzą, że ludzie mają dużą łatwość w ocenianiu potencjalnych partnerów do gry. Niewiele potrzeba nam by zdecydować z kim warto grać, a z kim nie.

5.7. Podsumowanie - czego się dowiedziałeś

Z tego rozdziału dowiedziałeś się, czy opłaca się zdradzać wspólnika napadu na bank. Następnie poznałeś różne warianty gry w dylemat więźnia, różne strategie możliwe do zastosowania w tej grze, oraz cechy strategii odznaczających się największą skutecznością w rozgrywce wielokrotnej. Na samym końcu dowiedziałeś się, że aby wiedzieć więcej powinieneś przeczytać "O pochodzeniu cnoty" Ridleya, do czego jeszcze raz zachęcam.

Rozdział 6. Gry n-osobowe

Tomasz Rostański

6.1. Wprowadzenie

Dotychczas analizowaliśmy gry, w których udział brały tylko 2 osoby. Pora zająć się grami o większej ilości graczy. Zatem za grę wieloosobową uznajemy taką grę, której liczba graczy jest większa, lub równa 3. Każdą taką grę możemy zapisać zarówno w postaci normalnej, jak i rozwiniętej, czyli analogicznie jak miało to miejsce w grach dwuosobowych. Ponadto podczas ich analizy korzystamy z wszystkich wcześniej przedstawionych zasad i pojęć (strategie dominujące, mieszane, minimaksowe).

Gry wieloosobowe również możemy podzielić na:

- nienegocjacyjne
- negocjacyjne

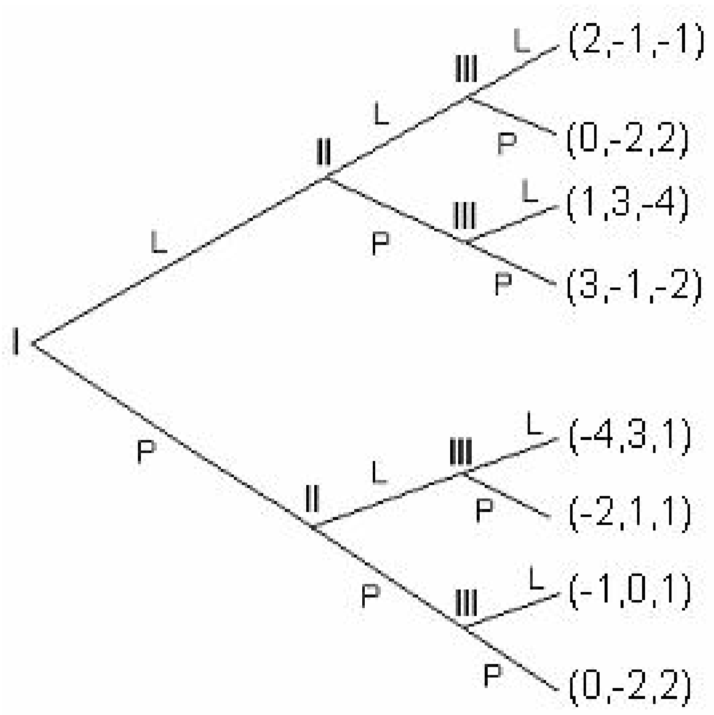
Gry negocjacyjne możemy z kolei podzielić na:

- *bez wypłat ubocznych* - gracze tworzą koalicje (koordynują swoje działania), jednakże nie mogą ofiarowywać sobie łapówek, za przystąpienie do koalicji, nie przewidzianych w macierzy wypłat.
- *z wypłatami ubocznymi* - działania mające na celu ofiarowywanie dodatkowych wypłat za dołączenie do koalicji (przekupstwo) są dozwolone.

Możemy mówić o poznaniu gry wieloosobowej, tylko w przypadku:

- poznania wszystkich koalicji, które się mogą utworzyć
- poznania wartości gry dla tych koalicji

Zanim przejdziemy do opisu pojęć i metod właściwych grom wieloosobowym, pora na przykład. Dane jest drzewo gry 3-osobowej. Należy podać wynik gry, zakładając, że gracze nie mogą zawiązywać koalicji.



Gry n-osobowe - przykład gry niekooperacyjnej

Zanim przystąpimy do dalszych rozważań, zapiszmy naszą grę w postaci macierzy wypłat. Będzie ona miała następującą postać:

		L		P		strategie gracza *II*
		L	P	L	P	strategie gracza *III*
strategie gracza *I*	L	2, -1, -1	0, -2, -2	1, 3, -4	3, -1, -2	
	P	-4, 3, 1	-2, 1, 1	-1, 0, 1	0, -2, 2	

Tabela 6.1. Gry n-osobowe - przykład gry niekooperacyjnej

Poszukajmy strategii dominujących pozostałe, dla każdego z graczy. Pamiętamy, że strategia dominująca to taka, która jest co najmniej tak korzystna jak pozostałe, dla każdej kombinacji strategii w grze, oraz, że zawsze należy wybierać strategię dominującą (jeśli chce się uchodzić za gracza racjonalnego).

Przypatrzmy się strategiom gracza I, a zobaczymy, że wszystkie wartości wypłaty dla strategii L są nieujemne, natomiast dla strategii P wartości te są niedodatnie. Zatem zasada dominacji jednoznacznie określiła nam wybór pierwszego z graczy - L. Analogicznie widzimy, że gracz III również ma strategię dominującą - P. Zastanówmy się natomiast nad strategiami gracza II. Możemy zauważyć, że gracz ten nie ma żadnej strategii dominującej (ponieważ w przypadku ruchu gracza I na L korzystniejsza jest strategia P, natomiast dla strategii P pierwszego gracza korzystniejsza jest strategia L).

Jeżeli założymy, że każdy z graczy wie jakie strategie ma przeciwnik (ale nie musi znać wyboru dokonanego przez pozostałych graczy), to oczywistym jest fakt, że gracz II wykryje strategie dominujące przeciwników i wybierze strategię najlepszą na kombinacje strategii dominujących przeciwników. Należy zatem przestudiować tylko 2 strategie. W zaistniałej sytuacji gracz II musi wybrać strategię P (ponieważ daje mu stratę -1, a nie -2). Zatem gra zakończy się wynikiem: LPP z wypłatą (3,-1,-2).

Przeanalizowaliśmy więc niekoalicyjną grę wieloosobową w sposób analogiczny do tego, jaki stosowaliśmy dla gier 2-osobowych. Jednakże jak się dalej przekonamy nie zawsze można zastosować tą metodę. Pozostałe metody analizy omówimy w dalszym rozdziale.

6.2. Funkcja charakterystyczna

Ze względu na problemy z konwersją tego dokumentu do formatu DocBooka (liczne symbole matematyczne) jest on dostępny wyłącznie w formacie MsWord (.doc). Aby go ściągnąć kliknij tutaj [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#teksty].

6.3. Wartość Shapleya

Jeżeli nie lubisz liczyć, to obliczając wartości Shapleya dla gier trzyosobowych skorzystaj z prostego skryptu, który zamieściłem na stronie - kliknij tutaj. [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#programy_wieleosob].

Ze względu na problemy z konwersją tego dokumentu do formatu DocBooka (liczne symbole matematyczne) jest on dostępny wyłącznie w formacie MsWord (.doc). Aby go ściągnąć kliknij tutaj [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#teksty_tomek].

Rozdział 7. Teoria gier w biologii

7.1. Jastrzębie vs. gołębie

Gra 'jastrzębie vs. gołębie' została po raz pierwszy opisana przez Johna Maynarda Smitha i George'a R. Price'a. Pisząc ten tekst korzystałem z opisu gry zamieszczonego w "Samolubnym genie" Dawkinsa i "Grach ewolucyjnych" Uchmańskiego. U Dawkinsa znajdziesz obszerne biologiczne uzasadnienie takich, a nie innych zasad gry.

Zwróć uwagę na to, że opisywana tu gra nie jest grą o sumie zerowej. Oznacza to, że wygrana jednego gracza nie jest równoznaczna z identyczną przegraną jego oponenta.

7.1.1. Zasady gry

Wyobraźmy sobie następującą sytuację. Mamy stado zwierząt - powiedzmy ptaków. Wszystkie osobniki rywalizują między sobą o *wygraną* (nieistotne co to takiego, może to być pożywienie, terytorium, prestiż itd.). Wygrana ma olbrzymie znaczenie - osobnik który ją zdobywa zwiększa swoje szanse na przeżycie, a co za tym idzie na wydanie na świat większej ilości potomstwa. Rywalizacja polega na potyczkach, z których każda zostaje rozstrzygnięta (nie ma możliwości remisu).

Teraz załóżmy, że występujące w stadzie osobniki używają w potyczkach dwóch różnych strategii:

a. *strategia jastrzębia*: osobnik zawsze walczy ostro, wycofuje się tylko wtedy, gdy zostanie poważnie ranny

b. *strategia gołębia*: osobnik ogranicza się do wykonywania gróźb pod adresem przeciwnika, nie rani nikogo

Osobniki używające pierwszej strategii będziemy nazywać *jastrzębiami*, a drugiej *gołębiami*.

Załóżmy jeszcze że poszczególne gołębie nie różnią się między sobą, tj. że każdy z gołębi jest jednakowo silny, szybki, sprawny itd. Identyczne założenie uczyńmy dla jastrzębi.

Przy tych założeniach potyczki będą przebiegać według jednego z trzech scenariuszy:

a. *gołąb* spotyka *jastrzębia* - jastrząb rusza do ataku, gołąb zwiewa. Wygrywa jastrząb.

b. *gołąb* spotyka *gołębia* - oba starają się przestraszyć rywala wykonując serię obelżywych gestów, stroszą pióra itd. - krew się nie leje. Szansa wygranej dla każdego z nich wynosi w tym przypadku 50%. Oba ptaki ponoszą koszt związany z marnowaniem czasu na długotrwałe zmagania - *cenę długotrwałej walki*.[13]

c. *jastrząb* spotyka j*astrzębia* - oba nawiązują walkę. Szansa wygranej dla każdego z nich wynosi 50%. Przegrywający ptak poniesie bolesną porażkę - nazwiemy ją *ceną przegranej walki*.

7.1.2. Macierz gry

Macierz tej gry wygląda następująco:

	jastrząb	gołąb
jastrząb		
gołąb		

Tabela 7.1. Jastrzębie vs. gołębie - ogólna macierz gry

[13] Sens *ceny długotrwałych zmagań* wyjaśnia Dawkins w "Samolubnym genie":

> [...] dla niewielkiego ptaka żyjącego w chłodnym klimacie, koszt w postaci straconego czasu może mieć znaczenie fundamentalne. Sikorka bogatka karmiąca pisklęta musi złowić przeciętnie jedną zdobycz co trzydzieści sekund. Cenna jest każda sekunda dziennego światła.

...hmmmm, no tak, tylko jeszcze wypadałoby wypełnić te puste pola. Będziemy wpisywać wartości do macierzy gry patrząc na nią z punktu gracza "wierszowego". I dla wygody użyjemy skrótów:

a. wygraną oznaczymy przez *v*

b. cenę przegranej walki przez *c*

c. cenę długotrwałej walki przez *t*

	jastrząb	gołąb
jastrząb	Szansa wygranej wynosi 50%. W przypadku wygranej jastrząb zgarnia *v*, w przypadku przegranej traci *c*.	Jastrząb wygrywa i zgrania *v*.
gołąb	Gołąb zwiewa i nic nie wygrywa.	Szansa zdobycia *v* wynosi 50%. Udział w długich zmaganiach kosztuje gołębia *t*.

Tabela 7.2. Jastrzębie vs. gołębie - macierz gry - opis

Te przydługie rozważania najlepiej zapisać skrótowo w języku matematyki:

	jastrząb	gołąb
jastrząb	(v-c)/2	v
gołąb	0	v/2 - t

Tabela 7.3. Jastrzębie vs. gołębie - macierz gry

7.1.3. Strategia ewolucyjnie stabilna

Zaczniemy od definicji. Według Dawkinsa *strategią ewolucyjnie stabilną...*

> ... definiuje się jako taką strategię, której od momentu gdy zostanie przyjęta przez większość członków populacji, nie jest w stanie wyprzeć żadna inna strategia alternatywna.

No to zastanówmy się jaka strategia spełnia ten warunek w przypadku populacji składającej się z jastrzębi i gołębi.

7.1.4. Gdybanie w celach naukowych

Teraz poświęćmy chwilę czasu na ...gdybanie. :) Nie będziemy jednak gdybać dla samej przyjemności gdybania - będziemy gdybać w celach naukowych próbując odnaleźć strategię ewolucyjnie stabilną. :)

Wyobraźmy sobie, że początkowo *stado składa się wyłącznie z gołębi*. A gdyby tak w wyniku mutacji[14] pojawił się wśród nich jastrząb ? Nietrudno przewidzieć co by się stało - pojedynczy jastrząb wygrywa potyczki, co (zgodnie z tym co pisałem o znaczeniu wygranej) zwiększa jego szanse na pozostawienie potomstwa. Liczba jastrzębi będzie więc w populacji rosła. Chciałoby się krzyknąć, że gołębiom grozi zagłada... ale wstrzymajmy się

[14]spowodowanej eksperymentami genetycznymi przeprowadzanymi przez bandę paskudnych UFOków ;)

chwilowo z pochopnymi wnioskami i gdybajmy sobie dalej. :)

Rozpatrzmy teraz sytuację odwrotną. A gdyby tak *stado złożone było wyłącznie z jastrzębi* i gdyby tak po pewnym czasie pojawił się w nim pojedynczy gołąb, to co by się stało ? Nie ma biedaczyna szans, co ? Na pierwszy rzut oka tak, w końcu nie wygra żadnej potyczki, ale... A gdyby tak okazało się, że wygrana v jest mniejsza od ceny przegranej walki c ? Wówczas okaże się, że gołąb mimo ucieczek z pola walki będzie "zarabiał" więcej niż jastrzębie ! Skutkiem czego ilość gołębi w stadzie zacznie rosnąć.

Jeżeli nie wierzysz, to sprawdź to sobie. Przygotowałem symulację gry, dzięki której można policzyć średnią wygraną gołębi i jastrzębi przy zadanych parametrach. Zachęcam do skorzystania z niej - kliknij tutaj. [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#programy_biologia]

7.1.5. I co z gdybania wynika

Nasze rozważania doprowadziły nas do wniosku, że ani strategia gołębi, ani strategia jastrzębi nie są strategiami ewolucyjnie stabilnymi. Zauważyliśmy, że populacja składająca się wyłącznie z osobników jednego rodzaju jest podatna na "inwazję" osobników używających odmiennej strategii.

No więc jak to w końcu jest ? Chciałoby się znaleźć *złoty środek* - taką liczba jastrzębi i gołębi w stadzie, która zapewni populacji równowagę. Dokładniej rzecz ująwszy - taką proporcję ilości jastrzębi i gołębi,

> do której będzie zmierzać każda populacja, niezależnie od tego, z jakiej liczby "gołębi" i "jastrzębi" składała się na początku.
>
> — J. Uchmański, Gry ewolucyjna

. Możemy być spokojni - taki zrównoważony skład populacji istnieje, czego dowiedli Maynard Smith i Price.

Proszę zauważyć, że tak naprawdę nie interesuje nas to, czy w populacji znajdzie się np. 20% gołębi i 80% jastrzębi, czy też może każdy z osobników tej populacji zachowuje się w 1/5 przypadków jak gołąb, a w pozostałych jak jastrząb.15 Jeżeli czytałeś tekst poświęcony strategiom mieszanym, to z pewnością wiesz o czym mówię.

W znalezieniu "punktu równowagi" pomoże drugi program. Znajduje on, dla zadanych parametrów (wielkość wygranej, cena przegranej i cena długotrwałej walki), procentowy skład populacji w punkcie równowagi. Kliknij tutaj by z niego skorzystać [http://www.giaur.qs.pl/teoriagier/index.php#programy_biologia].

7.1.6. Inne strategie - pozer i odwetowiec

Rzecz jasna omówione powyżej strategie nie są jedynymi możliwymi. Dawkins i Straffi omawiają jeszcze dwie inne:

a. *pozer (chojrak)* - udaje twardziela, tj. na początku przystępuje do ataku, ale jeżeli przeciwnik się nie przestraszy, wówczas pozer zmyka. W starciu z jastrzębiem zachowuje się więc jak gołąb, w starciu z gołębiem jak jastrząb.

b. *odwetowiec (mściciel)* - na początku walki zachowuje się jak gołąb. Jeżeli przeciwnik zaatakuje, odpłaca mu tym samym. W starciu z jastrzębiem zachowuje się więc jak jastrząb, w starciu z gołębiem jak gołąb.

Możliwe są też różne odmiany tychże strategii. Np. odwetowiec sondujący zachowuje się podobnie do odwetowca, z tym że od czasu do czasu stara się zaostrzyć walkę. Jeżeli przeciwnik nie podejmie walki, odwetowiec sondujący zachowuje się jak jastrząb. Jeżeli przeciwnik podejmie walkę, odwetowiec sondujący zachowuje się jak gołąb.

7.1.7. Nie ma lekko...

15jeżeli jesteś słaby z matmy, to podpowiem Ci, że 1/5 to dokładnie tyle co 20%. :)

A na zakończenie zimny prysznic na gorące głowy rozpalone wizją tak prostego uporania się z tajnikami zachowań zwierząt. :) Weźcie sobie do serca poniższe słowa:

> Cała ta opowieść o jastrzębiach i gołębiach jest oczywiście naiwnie prosta. Jest modelem, czymś co w rzeczywistości nie występuje w przyrodzie, ale ma nam pomóc w zrozumieniu zjawisk, które naprawdę w naturze istnieją.
>
> —Richard Dawkins

Rozdział 8. Teoria gier w filozofii

Pewnym zaskoczeniem może być fakt, że teorię gier można wykorzystywać w tak odległej zdawałoby się dziedzinie jak filozofia. W "Teorii gier" Straffina znajdziesz omówienie problemu wolnej woli Newcomba. Ja przedstawię zagadnienie nieco mniej skomplikowane, mianowicie tzw. *Zakład Pascala*.

8.1. Zakład Pascala

Zakład Pascala zazwyczaj przedstawia się omawiając dowody na istnienie Boga. I zaraz prędko dodaje się, że nie jest to żaden dowód, raczej próba przekonania człowieka wahającego się, o tym, że wiara jest opłacalna.

8.1.1. Błażej ma głos

> - Tak, ale trzeba się zakładać; to nie jest rzecz dobrowolna, zmuszony jesteś. Cóż wybierzesz? Zastanów się. Skoro trzeba wybierać, zobaczmy, w czym mniej ryzykujesz. Masz dwie rzeczy do stracenia: prawdę i dobro; i dwie do stawienia na kartę: swój rozum i swoją wolę, swoją wiedzę i swoją szczęśliwość; twoja zaś natura ma dwie rzeczy, przed którymi umyka: błąd i niedolę. Skoro trzeba koniecznie wybierać, jeden wybór nie jest z większym uszczerbkiem dla twego rozumu niż drugi. To punkt osądzony. A twoje szczęście? Zważmy zysk i stratę zakładając się, że Bóg jest. Rozpatrzmy te dwa wypadki: jeśli wygrasz, zyskujesz wszystko; jeśli przegrasz, nie tracisz nic. Zakładaj się tedy, że jest, bez wahania.
>
> —Blaise Pascal, "Myśli", tłum. T. Żeleński (Boy)

Dodatkowo Pascal zauważa, że w tej "grze" mamy możliwość "podejrzenia kart" - np. poprzez mądrość Biblijną, tudzież inne źródła wiedzy katolickiej, które sugerują nam, że Bóg istnieje. Jego konkluzja jest następująca - należy żyć tak, jakby Bóg istniał.

8.1.2. Teoria gier ma głos

Sytuacja jest następująca - człowiek stoi w obliczy wyboru, czy tego chce czy nie. Musi zdecydować jak ma żyć - tak jakby Bóg istniał, czy też tak, jakby Go nie było. Istnieją cztery możliwości.

- Bóg istnieje, a człowiek w niego wierzy - czeka go więc nagroda w postaci życia wiecznego
- Bóg istnieje, a człowiek w niego nie wierzy - czeka go kara, wieczne potępienie
- Boga nie ma, a człowiek w niego wierzy - w pewien sposób "marnuje"16 swoje życie
- Boga nie ma, a człowiek w niego nie wierzy - "zyskuje" doczesność robiąc z nią co tylko ma ochotę

Jest to więc "gra" w której każdy z "graczy" ma po dwie strategie. Pierwszy "ruch" należy do Boga, drugi do człowieka. Zauważmy, że człowiek podejmuje decyzję nie wiedząc jaki ruch wykonał Bóg - jest to więc gra z niepełną informacją. Można ją przedstawić w postaci ekstensywnej, można też i w normalnej:

	istnieje	nie istnieje
wierzy	życie wieczne	- życie doczesne
nie wierzy	- życie wieczne	życie doczesne

Tabela 8.1. Zakład Pascala - macierz wypłat

16pytanie, czy żyjąc cnotliwie można "zmarnować" życie ?

...cóż tu komentować ? Przy tak rozpisanych wypłatach nie ma się nad czym zastanawiać i wypada nam tylko powtórzyć za Pascalem „"Zakładaj się tedy, że jest, bez wahania"”. Jest tylko jedno "ale"...

8.1.3. Łyżka dziegciu ma głos :)

Nie będę się tu rozwodził nad filozoficznymi czy teologicznymi implikacjami zakładu Pascala, bo nie mam o tym pojęcia. :) Zakład Pascala interesuje mnie jako przykład pewnego typu gry. I właśnie na tej płaszczyźnie chciałbym zgłosić jedno zastrzeżenie.

W moim odczuciu powyższa gra ma jeden słaby punkt - sposób przypisania wypłat do odpowiednich wyborów dokonywanych przez człowieka. Pascal przeciwstawia możliwość zyskania/utraty wiecznego życia (a więc nieskończoności) możliwości zyskania/utraty życia doczesnego (a więc czegoś nieporównywalnie mniejszego). Przeciwstawiając te dwie wartości dochodzi do oczywistego wniosku - lepiej walczyć o szczęśliwą wieczność niż o doczesność. Tymczasem jeżeli Boga nie ma, wówczas życie doczesne staje się WSZYSTKIM co możemy mieć. Jest więc nieskończonością i doprawdy jego "nikłość" w porównaniu do życia wiecznego staje się dyskusyjna.

Rozdział 9. Różności

9.1. Różne typy gier

Oto wybrane gry (problemy, sytuacje) rozpatrywane w ramach teorii gier. Być może kiedyś opisze je bardziej szczegółowo, jak na razie tylko po kilka słów o każdej. Podane tu nazwy nie są "ścisłe" - niektóre z nich oznaczają bardzo konkretną grę, inne całą klasę podobnych gier. W niektórych przypadkach nie podałem polskich nazw, bo ich nie znam - jeżeli je znasz, albo jeżeli znasz inne angielskie nazwy opisanych tu gier, to mi je podpowiedz - <giaur@qs.pl>.

9.1.1. Aukcja[17]

Aukcje obejmują wiele różnych typów "gier", w których kilku graczy stara się zdobyć pewne dobro - przedmiot wystawiony na aukcji. Dla każdego z graczy przedmiot ten ma pewną wartość (różną dla różnych graczy !). Gracze podają ile byliby skłonni zapłacić za przedmiot aukcji. Wygrywa ten z nich, który zalicytuje najwięcej. Jeżeli najwyższą stawkę podało kilku graczy, wówczas przedmiot aukcji przypada temu, dla którego ma on największą wartość.

Istnieją różne rodzaje aukcji. W zależności od tego, trybu zgłaszania swoich ofert (jednorazowo czy też można zmieniać swoją ofertę), opłat za wygraną/udział w aukcji, wyróżnić można kilka gier aukcyjnych. Oto te najpopularniejsze:

- *aukcja angielska* - czyli to, co my zwiemy licytacją. Ten kto zalicytował najwięcej płaci za przedmiot aukcji zgłoszoną przez siebie stawkę. Uczestnicy aukcji mogą wielokrotnie zgłaszać swoje oferty.
- *aukcja holenderska* - prowadzący aukcję zaczyna od wysokiej ceny i stopniowo ją obniża. Kto pierwszy zgłosi chęć zakupu zostaje właścicielem dobra płacąc za nie cenę, na którą się zgodził. Prowadzącego aukcję holenderską przyrównuje się do właściciela komisu, który co pewien czas obniża cenę towaru, aż trafi się kupiec.
- *first-price sealed-bid auction* - każdy uczestnik aukcji zgłasza jedną ofertę, bez znajomości ofert zgłoszonych przez konkurentów. Wygrywa ten, który zgłosił najwyższą stawkę - i ją właśni płaci za dobro wystawione na aukcję.
- *aukcja Vickrey'a* - każdy uczestnik aukcji zgłasza jedną ofertę. Wygrywa ten, kto zgłosił najwyższą ofertę, ale płaci za przedmiot aukcji tyle, ile wyniosła druga co do wielkości oferta.
- *aukcja typu "wszyscy płacą"* - każdy z uczestników aukcji płaci zgłoszoną przez siebie kwotę (albo jej część), zaś dobro otrzymuje ten, który zgłosił najwyższą stawkę.

Zwróćmy uwagę na to, że aukcję te różnią się nie tylko dla uczestników ale i dla prowadzącego aukcję. Weźmy aukcję angielską i Vickreya - w której z nich wylicytowana zostanie wyższa cena ?

Obszerne omówienie różnego typu aukcji oraz rozważania na temat ich wad i zalet w realnych zastosowaniach znajdziesz u Sandholma.

9.1.2. Gra w cykora

Imprezka w terenie + piwo + panienki. Dwóch gości rywalizuje o miano twardziela. Wsiadają do aut, ustawiają je naprzeciw siebie, gaz do dechy i... no właśnie, i co dalej ? Wytrzymać jeszcze sekundę licząc na to, że przeciwnik okaże się "cykorem" czy też skręcić kierownice i uniknąć kolizji ? Ta prosta gra (znana również jako

17W Polsce słowa "aukcja" używamy czasem zamiennie ze słowem "licytacja". W rzeczywistości licytacja jest pewną szczególną formą aukcji.

"drogowy poker" oraz "chicken") doczekała się naukowego opracowania.

9.1.3. Gra o dobro wspólne

Każdy z czterech graczy dostaje do ręki 20$. Każdy z nich decyduje jaką część tej kwoty wpłaci do wspólnej puli. Następnie suma zebrana w puli ulega podwojeniu i każdy z graczy otrzymuje czwartą jej część. Taką grę rozgrywa się wielokrotnie. Jedną z modyfikacji jest wprowadzenie kar - gracze po zakończeniu każdej rundy mogą nałożyć grzywnę na współuczestników, ale sami płacą 30% nałożonej na innych kary.

9.1.4. Exchange game

Dwóch graczy. Każdy z nich otrzymuje kartkę z liczbą z zakresu od 0 do 1. Ta liczba to wielkość wygranej jaką może otrzymać gracz. Każdy z graczy jednocześnie decyduje czy chce wymienić swoją kartkę z kartką drugiego gracza. Wymiana następuje tylko jeżeli oboje sobie tego zażyczą.

9.1.5. Game of timing

Przykładowa gra tego typu - *war of attrition*. Dwaj gracze rywalizują o pewne dobro. Dla gracza o numerze i przedmiot ten ma pewną wartość vi. Każdy z graczy w dowolnym momencie może zdecydować, że oddaje przedmiot w ręce drugiego gracza. Ważny jest moment, w którym to nastąpi, bowiem wraz z upływem czasu maleje wypłata. Jeżeli oboje gracze zdecydują się w tym samym momencie przekazać przedmiot sporu przeciwnikowi, każdy z nich otrzymuje vi/2

9.1.6. Gra w ultimatum

Jest dwóch graczy. Jeden z nich dostaje do ręki 100$. Następnie proponuje drugiemu graczowi pewien podział tej kwoty - np. dostaniesz ode mnie 20$. Jeżeli drugi zgodzi się na zaproponowany podział, wówczas każdy z nich otrzymuje odpowiednią kwotę (w tym przypadku pierwszy 80$, drugi 20$). Jeżeli drugi gracz odrzuci ofertę, żaden z nich nie dostanie ani centa.

W przypadku tej gry trudno się powstrzymać od pewnego komentarza. Teoria gier niewiele ma tu do powiedzenia, a właściwie sprawa jest na tyle prosta, że nie ma o czym mówić - racjonalnie myślący drugi gracz powinien przyjąć każdą niezerową ofertę. Tak naprawdę gra w ultimatum jest interesująca z punktu widzenia nauk społecznych - okazuje się bowiem, że ludzie nierzadko podejmują tu decyzje stojące w skrajnej sprzeczności z modelem *homo economicus*.