Tomasz Rostański

Gry wieloosobowe

Wersja niedokończona
(wersje dokończoną szlag trafił wraz ze śmiercią strony giaur.qs.pl)

Wprowadzenie.

Dotychczas analizowaliśmy gry, w których udział brały tylko 2 osoby. Pora zająć się grami o większej ilości graczy. Zatem za grę wieloosobową uznajemy taką grę, której liczba graczy jest większa, lub równa 3. Każdą taką grę możemy zapisać zarówno w postaci normalnej, jak i rozwiniętej, czyli analogicznie jak miało to miejsce w grach dwuosobowych. Ponadto podczas ich analizy korzystamy z wszystkich wcześniej przedstawionych zasad i pojęć (strategie dominujące, mieszane, minimaksowe).

Gry wieloosobowe również możemy podzielić na:

- nienegocjacyjne
- negocjacyjne.

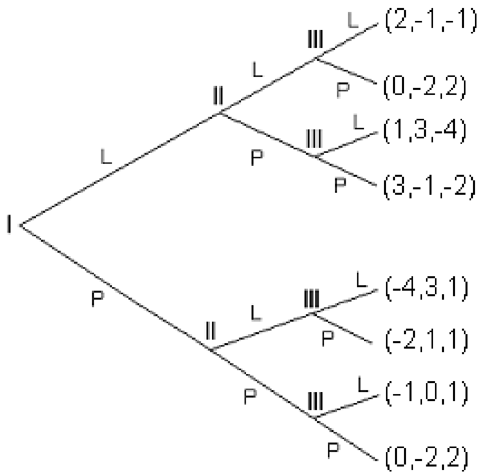
Gry negocjacyjne z kolei możemy podzielić na:

- *bez wypłat ubocznych* – gracze tworzą koalicje (koordynują swoje działania), jednakże nie mogą ofiarowywać sobie łapówek, za przystąpienie do koalicji, nie przewidzianych w macierzy wypłat.
- *z wypłatami ubocznymi* – działania mające na celu ofiarowywanie dodatkowych wypłat za dołączenie do koalicji (przekupstwo) są dozwolone.

Możemy mówić o poznaniu gry wieloosobowej, tylko w przypadku:

- poznania wszystkich koalicji, które się mogą utworzyć,
- poznania wartości gry dla tych koalicji.

Zanim przejdziemy do opisu pojęć i metod właściwych grom wieloosobowym, pora na przykład.
Dane jest drzewo gry 3-osobowej. Należy podać wynik gry, zakładając, że gracze nie mogą zawiązywać koalicji.



Zanim przystąpimy do dalszych rozważań, zapiszmy naszą grę w postaci macierzy wypłat. Będzie ona miała następującą postać:

		L		P		
		L		P		strategie gracza **II**
		L	P	L	P	strategie gracza **III**
strategie gracza **I**	L	2,-1,-1	0,-2,2	1,3,-4	3,-1,-2	
	P	-4,3,1	-2,1,1	-1,0,1	0,-2,2	

Poszukajmy strategii dominujących pozostałe, dla każdego z graczy. Pamiętamy, że strategia dominująca to taka, która jest <u>co najmniej</u> tak korzystna jak pozostałe, dla każdej kombinacji strategii w grze, oraz, że zawsze należy wybierać strategię dominującą (jeśli chce się uchodzić za gracza racjonalnego ☺).
Przypatrzmy się strategiom gracza I, a zobaczymy, że wszystkie wartości wypłaty dla strategii L są nieujemne, natomiast dla strategii P wartości te są niedodatnie. Zatem zasada dominacji jednoznacznie określiła nam wybór pierwszego z graczy – L. Analogicznie widzimy, że gracz III również ma strategię dominującą – P. Zastanówmy się natomiast nad strategiami gracza II. Możemy zauważyć, że gracz ten nie ma żadnej strategii dominującej (ponieważ w przypadku ruchu gracza I na L korzystniejsza jest strategia P, natomiast dla strategii P pierwszego gracza korzystniejsza jest strategia L).

Jeżeli założymy, że każdy z graczy wie jakie strategie ma przeciwnik (ale nie musi znać wyboru dokonanego przez pozostałych graczy), to oczywistym jest fakt, że gracz II wykryje strategie dominujące przeciwników i wybierze strategię najlepszą na kombinacje strategii dominujących przeciwników. Należy zatem przestudiować tylko 2 strategie. W zaistniałej sytuacji gracz II musi wybrać strategię P (ponieważ daje mi stratę –1, a nie -2). Zatem gra zakończy się wynikiem: LPP z wypłatą (3,-1,-2).

Przeanalizowaliśmy więc niekoalicyjną grę wieloosobową w sposób analogiczny do tego, jaki stosowaliśmy dla gier 2-osobowych. Jednakże jak się dalej przekonamy nie zawsze można zastosować tą metodę. Pozostałe metody analizy omówimy w dalszym rozdziale.

Funkcja charakterystyczna.

Rozpatrzmy następującą sytuację – mamy kilku graczy, którzy mogą uzyskać pewne wypłaty w wyniku zawarcia odpowiednich koalicji. Funkcja charakterystyczna to taki Święty Mikołaj, który dla każdej utworzonej koalicji ma w swoim worku prezent i go jej ofiaruje. Mówiąc bardziej formalnie – funkcja charakterystyczna *v* przypisuje każdemu podzbiorowi $K \subseteq N$ (*N* to zbiór wszystkich graczy) wartość wypłaty *v(K)*. Funkcja ta ma następujące właściwości:
wartość dla koalicji pustej wynosi 0 (v(Ø) = 0),
dla dowolnych koalicji K i L zachodzi $v(K \cup L) \geq v(K) + v(L)$, (funkcja jest superaddytywna)

Dodatkowo, jeśli $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(i)$, to mamy do czynienia z grami, które <u>nie</u> <u>są</u> nieistotne. Gra nieistotna to taka, w której łączna wypłata dla koalicji pełnej jest równa wypłatom osiągniętym przez niekooperujących graczy, a nazywamy ją nieistotną, ponieważ wszyscy gracze wezmą co im się należy, nie zadając sobie trudu w zakładanie jakichkolwiek koalicji, nie ma więc większego sensu jej analizowanie.
Ponadto jeśli dla wszystkich koalicji $K \subset N$ spełniony jest warunek:
$v(K) + v(N - K) = v(N)$
to mamy do czynienia z grą o sumie stałej, a jeśli v(N) = 0 to z grą o sumie zerowej.

No dobra, ale jak to ma się do gier danych w postaci tabelki? Mając grę w postaci normalnej za wartość *v(K)* przyjmujemy poziom bezpieczeństwa dla tej koalicji *K*, czyli wartość jaką ona osiągnie grając przeciwko koalicji (*N-K*).

Pora na przykłady:
Pierwszy przykład będzie polegał tylko na zapisaniu gry w postaci funkcji charakterystycznej, bez jej analizowania. Analizy dokonamy w dalszej części. Drugi przykład będzie pokazywał sposób konwersji gry zapisanej w postaci normalnej (tabelka) do funkcji charakterystycznej.

Przykład 1.
Sztandarową grą prezentowaną w tym momencie jest gra, autorstwa von Neumanna i Morgensterna, polegająca na podziale 1 dolara na 3 graczy. Gracze otrzymają dolara tylko w wyniku uzgodnienia podziału między sobą. W przypadku braku zgody nikt nie dostaje nic. Dodatkowo zakładamy, że do przegłosowania układu wypłat wystarczy zgoda dwóch graczy (koalicje 2-osobowe przegłosowują układ wypłat dający im całą wypłatę, nie dając przeciwnikowi nic). Taką grę można opisać następującą funkcją charakterystyczną, podając zapis wypłaty w centach:

v(Ø) = 0,
v(A) = v(B) = v(C) = 0,
v(A,B) = v(A,C) = v(B,C) = 100
v(A,B,C) = 100

Przykład 2.
Spróbujemy przekształcić grę zapisaną w postaci normalnej do postaci funkcji charakterystycznej. Macierz wypłat ma postać:

	L		P		strategie gracza **II**
	L	P	L	P	strategie gracza **III**

strategie gracza **I**				
L	2,-1,-1	0,-2,2	1,3,-4	3,-1,-2
P	-4,3,1	-2,1,1	-1,0,1	0,-2,2

Wartość funkcji charakterystycznej dla gracza I to będzie wartość wypłaty, jaką on osiągnie grając przeciwko koalicji graczy II i III. Zastanówmy się zatem, jak zagra koalicja (II, III). Wiadomo, że gracz I zagra L (z kryterium dominacji), gracze II i III muszą zatem odpowiedzieć na to posunięcie w sposób maksymalizujący ich wygraną (albo minimalizujący przegraną). Możemy zauważyć, że wypłata dla tej koalicji, wynosi *(-1,-1)*, *(-2,2)*, *(3,-4)*, *(-1,-2)*, co zapisujemy jako sumę wypłat, czyli: *-2*, *0*, *-1*, *-1*. Największą z tych wartości jest *0*. Zatem *v(II,III) = 0*, a wartość osiągnięta dla gracza I w tej konfiguracji *v(I) = 0*. W sposób analogiczny obliczamy wartość wypłat dla kolejnych koalicji. Otrzymamy:

v(∅) = 0,
v(I) = 0,
v(II) = -1,
v(III) = -2,
v(I,II) = 2,
v(II,III) = 0,
v(I,III) = 1,
v(I,II,III) = 0.

Może nasunąć się pytanie – dlaczego, we wprowadzeniu do gier wieloosobowych, podczas analizy tej gry gracz I uzyskał wypłatę 3, a teraz 0? Ponieważ wtedy nie dopuszczaliśmy kooperacji graczy, a teraz jest ona możliwa i gracze II i III skoordynowali swoje działania skutecznie przeciwdziałając takiemu wynikowi.
Nasuwa się kolejne pytanie – czy komukolwiek opłaca się tworzenie koalicji w tej grze? Na pewno graczom II i III, bo poprzednio gra przynosiła im straty, a teraz wyszli na *0*. Dlatego jeżeli dopuścimy możliwość zawiązywania koalicji, to gracz I, zaproponuje graczowi II koalicję. Ponieważ gracz II nie kooperując otrzymałby wypłatę –1, więc gracz I musi zagwarantować mu wyższą. Dlatego może albo graczowi II zapewnić wypłatę = 0, lub dokonać podziału wygranej = 2 po połowie, zgodnie z zasadą: lepiej mieć jeden niż zero. Zwróćmy uwagę, że w porównaniu z tą samą grą bez możliwości zawierania koalicji, gracz III wyszedł tak samo, gracz I stracił, a gracz II zyskał.

Na koniec przykładu taka mała uwaga: *nie jestem pewien, czy proces ten przeprowadziłem prawidłowo*, co wynika albo z braku jakichkolwiek wzmianek w dostępnej mi literaturze, albo z ich tajemniczej zdawkowości i braku jakichkolwiek przykładów.

O dwóch grach powiemy, że są strategicznie równoważne, jeżeli wypłaty pierwszej można przekształcić w wypłaty drugiej przez:

- dodanie do wypłat pewnej stałej wartości;
- pomnożenie przez stałą wartość.

Zatem jeśli znajdziemy rozwiązanie jednej gry, to automatycznie mamy rozwiązanie gry do niej strategicznie równoważnej.

Podział (imputancja)

Przez pojęcie podziału, w przypadku *n*-graczy, rozumiemy *n*-wymiarowy wektor wypłat $x = (x_1, ..., x_n)$, który spełnia następujące warunki:

- $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$ (kryterium zbiorowej racjonalności);
- $\underset{i=1,..,n}{\forall} x_i \geq v(i)$ (kryterium indywidualnej racjonalności).

Wypłaty uzyskane w wyniku podziału są korzystne ze względu na wszystkich graczy (zbiorowa racjonalność) i dla każdego z graczy z osobna (indywidualna racjonalność), czyli w jego wyniku każdy z graczy zyska więcej, niż zyskałby grając sam, a ponadto wypłata dla koalicji jest wyższa od sumy wypłat uzyskanych w wyniku braku kooperacji.

Dodatkowo, w przypadku podziałów możemy mówić o dominowaniu jednego przez drugi, ze względu na pewną koalicję K (w szczególnym przypadku może to być koalicja pełna). Zatem $x = (x_1, ..., x_n)$ dominuje $y = (y_1, ..., y_n)$ jeśli dla koalicji K :

- $\underset{i \in K}{\forall} x_i > y_i$ (dla wszystkich członków koalicji K wypłaty dawane przez x są wyższe do tych dawanych przez y)
- $\sum_{i \in K} x_i \leq v(K)$ (podział ten jest osiągalny dla koalicji K)

Przykład.
Powróćmy do zdefiniowanej wcześniej gry polegającej na podziale dolara. Funkcja charakterystyczna miała postać:

$$v(\emptyset) = 0,$$
$$v(A) = v(B) = v(C) = 0,$$
$$v(A,B) = v(A,C) = v(B,C) = 100$$
$$v(A,B,C) = 100$$

Z samego już zapisu funkcji charakterystycznej wynikają następujące podziały:
$(a,100-a,0), (a,0,100-a), (0,a,100-a), (b,c,100-b-c);$ $\quad a<100, \quad b+c<100$

Zajmijmy się podziałem $(b,c,100-b-c)$. Możemy zauważyć, że ze względu na koalicję (A,B) jest on dominowany przez imputancję $(a,100-a,0)$, przy koalicji (A,C) przez $(a,0,100-a)$, a przy (B,C) przez $(0,a,100-a)$. Zwróćmy uwagę, że nie zastanawiamy się czy dany podział jest sprawiedliwy i czy nie dyskryminuje któregoś z graczy.

Rdzeń gry
Rdzeń stanowią wszystkie niezdominowane podziały spełniające, dla każdej koalicji K, następujący warunek: $\sum_{i \in K} x_i \geq v(K)$, co interpretujemy jako warunek racjonalności koalicyjnej. Mówi on, że podział x należy do rdzenia, jeśli wszyscy członkowie koalicji K otrzymają łączną wypłatę co najmniej taką, jaką koalicja K może sobie zagwarantować. O rdzeniu gry możemy powiedzieć, że jest zbiorem równorzędnych (w rozumieniu teorii gier) podziałów, z których każdy może stać się rozwiązaniem gry. Jednakże w wielu przypadkach rdzeń jest zbiorem pustym.

Przykład.
Powróćmy do podziału dolara. Podstawmy sobie a = 50, b = 33.3, c = 33.3. Wówczas otrzymamy następujące podziały: *(50,50,0), (50,0,50), (0,50,50), (33.3, 33.3, 33.3).* Jak mówiliśmy wcześniej podział ostatni jest zdominowany przez pozostałe. Podziały te spełniają ponadto warunek racjonalności koalicyjnej, ponieważ 50+50 = 100, a tyle wynoszą wartości koalicji. Zatem w tym przypadku rdzeń gry będą stanowić podziały:
(50,50,0), (50,0,50), (0,50,50).

Wartość Shapleya
Shapley zastosował nieco inne podejście do problemu podziału wypłaty otrzymanej przez koalicję, pomiędzy graczy ją tworzących. Wyszedł on z założenia, że taki podział musi być sprawiedliwy, tzn. że każdy z graczy dostanie wypłatę proporcjonalną do wkładu jaki wniósł do koalicji. W tym celu musimy zdefiniować i obliczyć siłę □ każdego z graczy, przy czym *jeśli gracze odgrywają taką samą rolę, wówczas ich siły są równe*. Za siłę gracza przyjmiemy wartość uśrednioną z jego wkładów wnoszonych do koalicji pełnej, przy wszystkich możliwych historiach jej powstania. Wartość ta stanowi wypłatę dla tego gracza. Dzięki teorii Shapleya możemy przyporządkować każdej grze tylko jedno rozwiązanie.

Przykład 1.
W przypadku podziału dolara każdy z graczy ma taki sam wkład w koalicję. Policzmy zatem wkład jaki wnoszą oni w koalicję pełną. Wypiszemy wszystkie możliwe historie powstania koalicji – czyli kolejności przystępowania graczy. Wiemy, że gracze otrzymają dolara tylko w przypadku powstania koalicji pełnej – czyli koalicje 1 i 2 osobowe nie otrzymają nic. Koalicja zapisana jako ABC oznacza, że wpierw powstała koalicja jednoosobowa A, potem AB, a wreszcie ABC. Wkłady poszczególnych graczy obliczamy jako różnicę wypłaty

dla koalicji z tym graczem a wypłaty dla koalicji bez niego. Zatem wkład gracza A obliczymy jako: *v(A) – v(Ø) = 0*, gracza B: *v(AB) – v(A) = 0*, gracza C: *v(ABC) – v (AB) = 1 – 0 = 1*.

wkład graczy

koalicja	A	B	C
ABC	0	0	1
ACB	0	1	0
BAC	0	0	1
BCA	1	0	0
CAB	0	1	0
CBA	1	0	0
	2	2	2

□ = 1/6 □ (2, 2, 2) = (2/6, 2/6, 2/6) = (1/3, 1/3, 1/3)

Otrzymaliśmy, że wkład każdego z graczy jest ten sam i wynosi 1/3 dolara.

Przykład 2.
Zastanówmy się nad grą 3-osobową o następującej funkcji charakterystycznej:

$$v(A) = v(B) = v(C) = 0$$
$$v(AB) = 3, \qquad v(AC) = 5, \qquad v(BC) = 7$$
$$v(ABC) = 10$$

wkład graczy

koalicja	A	B	C
ABC	0	3	7
ACB	0	5	5
BAC	3	0	7
BCA	3	0	7
CAB	5	5	0
CBA	7	3	0
	18	16	26

Zatem: □ = 1/6 □ (18, 16, 23) = (3, $2\,^{2}/_{3}$, $4\,^{1}/_{3}$).

No dobrze, jak łatwo zauważyć liczba wierszy takiej tabelki wynosi n! gdzie n to rozmiar koalicji pełnej. Dla 3 graczy sobie poradzimy, ale dla 4 otrzymamy już 24 wiersze, co czyni zabawę ździebko nieprzyjemną. Na całe szczęście, czasami nie musimy przejmować się wszystkimi graczami, czasem wystarczy skupić się tylko na jednym. Wiemy, że wnoszony przez niego wkład wynosi *v(K) – v(K - i)*, oraz, że jest on taki sam dla wszystkich uporządkowań, w których jest on poprzedzany przez *k - 1* graczy (należących do koalicji K), oraz że po nim występuje *n - k* graczy nie należących do tej koalicji. Liczba takich uporządkowań wyniesie więc *(k - 1)! ·(n - k)!*. Wówczas wartość Shapleya dla tego szczęśliwca wyraża się wzorem:

$$\varphi_i = \frac{1}{n!}\sum_{i\in K}[(k-1)!(n-k)!(v(K)-v(K-i))].$$

Przykład 3.
Prześledźmy zastosowanie wzoru dla gracza A dla gry z przykładu 2.

koalicja K	**(k-1)!(n-k)!**	**v(K)-v(K-i)**	**iloczyn**
A	1*2=1	0-0=0	0
AB	1*1=1	3-0=3	3
AC	1*1=1	5-0=5	5

ABC	2*1=2	10-5=5	10
		suma:	18

Otrzymamy: □$_A$ = $^1/_6$ □ 18 = 3, co jest zgodne z wynikiem z przykładu 2.

Pora jeszcze wspomnieć o wadzie jaką posiada metoda Shapleya. Teoria Shapleya wymaga, przywiązywania tej samej wagi do wzrostu wypłaty każdego z graczy (w przeciwnym razie obliczenie wartości średniego wkładu w koalicję nie miałoby sensu). Dodatkowo nie uwzględnia się tzw. siły przebicia każdego z graczy, czyli jego umiejętności targowania się. Ponadto otrzymany podział nie należy do jądra gry. Jednakże mimo to wartość Shapleya jest najważniejszą i najczęściej stosowaną metodą sprawiedliwego podziału w teorii gier.

Nukleolus

Zdefiniujmy, dla każdego podziału *x* i każdej koalicji *K,* pojęcie przekroczenia (różnicy) jako:

$$e_K(x) = v(K) - \sum_{i \in K} x_i \ .$$

Jest to różnica pomiędzy wartością wypłaty jaką członkowie koalicji *K* otrzymaliby po zdecydowaniu się na współdziałanie we własnym interesie, a wypłatą otrzymaną w ramach podziału *x*. Różnica ta określa miarę niezadowolenia członków koalicji *K* z podziału *x*. W takim przypadku należy znaleźć (zmodyfikować) imputację *x*, która uciszy najbardziej niezadowoloną grupę graczy (zminimalizuje największą różnicę), poprzez zabranie części wypłaty pozostałym koalicjom, a danie tej najbardziej pokrzywdzonej. Proces jest przeprowadzamy aż do momentu, w którym obniżenie któregokolwiek z przekroczeń spowoduje wzrost różnicy dla innych koalicji. Podział w ten sposób otrzymany nazywamy *nukleolusem gry* i oznaczamy przez grecką literę □.

Przykład 1.

Spróbujmy znaleźć nukleolus dla podziału dolara:

v(A) = v(B) = v(C) = 0
v(A,B) = v(A,C) = v(B,C) = 0
v(A,B,C) = 100

Obliczmy wartości przekroczeń dla podziału (30, 50, 20)

$e_A(x) = 0 – 30 = -30,$
$e_B(x) = 0 – 50 = -50,$
$e_C(x) = 0 – 20 = -20,$
$e_{AB}(x) = 0 – (30+50) = -80,$
$e_{AC}(x) = 0– (30+20) = -50,$
$e_{BC}(x) = 0 – (50+20) = -70,$
$e_{ABC}(x) = 100 – (30+50+20) = 0.$

Przykład 2.

Rozpatrzmy następującą grę, zaczerpniętą ze Straffina:

v(A) = v(B) = v(C) = 0
v(A,B) = 60, v(A,C) = 80, v(B,C) = 100,
v(A,B,C) = 105.

Obliczmy wartości przekroczeń dla dowolnego podziału, niech to będzie np. (20, 35, 50):

$e_A(x) = 0 – 20 = -20,$
$e_B(x) = 0 – 35 = -35,$
$e_C(x) = 0 – 50 = -50,$
$e_{AB}(x) = 60 – (20+35) = 5,$
$e_{AC}(x) = 80 – (20+50) = 10,$
$e_{BC}(x) = 100 – (35+50) = 15,$

$e_{ABC}(x) = 105 – (20+35+50) = 0.$

Zauważmy, że dla koalicji jednoosobowych przekroczenie ≤0, a dla koalicji pełnej wynosi 0. Największa wartość przekroczenia wynosi 15 dla koalicji B,C. Należy zatem zmniejszyć wypłatę dla gracza A i przekazać tą kwotę koalicji B, C. Zabierzmy A 5 jednostek i dajmy B (bo $e_{AC}(x)>e_{AB}(x)$), otrzymamy więc podział (15, 35, 55). Policzmy przekroczenia dla tej imputancji:
$e_{AB}(x) = 60 – (20+35) = 10,$
$e_{AC}(x) = 80 – (20+50) = 10,$
$e_{BC}(x) = 100 – (35+50) = 10.$

Zatem otrzymaliśmy nukleolus tej gry w postaci: □ = *(15, 35, 55).*

Na zakończenie należy wspomnieć o zaletach nukleolusa – zawsze istnieje, podobnie jak wartość Shapleya jest pojedynczą imputancją, ale w przeciwieństwie do wektora Shapleya jest łatwiejszy do obliczenia i zawsze należy do jądra (jeżeli tylko ono istnieje).